НОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ В УПРАВЛЕНИИ

А. Кофман Х. Хил Алуха

МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СКРЫТЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Новые математические модели и методы в управлении

А. КОФМАН Х. ХИЛ АЛУХА

МОДЕЛИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СКРЫТЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Перевод с испанского
под редакцией
В.В.Краснопрошина,
Н.А.Лепешинского

МИНСК
«ВЫШЭЙШАЯ ШКОЛА»
1993

УДК 330.46

Кофман А., Хил Алуха Х. Модели для исследования скрытых воздействий: Пер. с исп. — Мн.: Выш. шк., 1993. — 160 с.: ил. — (Новые мат. модели и методы в управлении.) — ISBN 5-339-01016-3.

Предложены методы выявления скрытых, не учтенных экспертами воздействий при анализе и оценке причинно-следственных отношений множества отдельных факторов на себя или на множество других факторов. Рассмотрены случаи, когда оценки задаются в виде нечетких чисел или доверительных интервалов и допускается или не допускается согласование мнений экспертов. Приведены примеры использования методов при управлении избирательной кампанией, финансами, оценкой коммерческого имиджа и целей предприятий.

Для специалистов по менеджменту, математическому моделированию и студентов соответствующих специальностей вузов.

Табл. 51. Ил. 21. Библиогр.: 7 назв.

Серия основана в 1992 г.

Перевод с испанского
под редакцией В.В.Краснопрошина,
Н.А.Лепешинского

$$К\ \frac{0601000000-035}{М304(03)-93}\ БЗ\ 139-93$$

ISBN 5-339-01016-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ ПЕРЕВОДА

Данная монография известного французского специалиста в области исследования операций профессора Арнольда Кофмана и его испанского коллеги профессора Хайме Хила Алухи опубликована в 1989 г. и является, насколько нам известно, первым систематизированным изложением математических методов проверки качества экспертных числовых оценок о влиянии (инциденций) каких-либо факторов на определенные свойства изучаемых систем из любой области человеческой деятельности. Обычно эксперты оценивают это влияние только непосредственно для пар "фактор—свойство", хотя существуют и косвенные (скрытые) инциденции множества факторов на себя и (или) множества свойств на себя. Даже при небольшом количестве факторов и свойств учет всевозможных скрытых воздействий без специальных методов затруднителен или вообще невозможен. Авторы предложили для этого эффективные математические модели и методы, основанные на операциях с соответствующими матрицами инциденций. Элементами матриц могут быть детерминированные или вероятностные оценки, нечеткие числа или доверительные интервалы. Их используют по-разному в зависимости от того, разрешается или не разрешается экспертам согласовывать свои мнения.

Материал, изложенный в книге, можно изучать, не обращаясь к другим источникам. Приведенные примеры иллюстрируют простоту предложенных методов и широчайшие возможности для их применения. Именно по этой причине мы включили книгу в серию "Новые математические модели и методы в управлении", подготавливаемую кафедрой математического обеспечения АСУ Белорусского государственного университета.

С согласия авторов несколько изменено название книги - оригинала — "Методы для исследования забытых воздействий". Этим самым подчеркивается, что неточности экспертных оценок носят не столько субъективный, сколько объективный характер. В то же время мы понимаем, что использованное нами название все-таки достаточно широко, потому что с общей точки зрения любое научное исследование занимается восстановлением скрытых взаимодействий в системах, явлениях, процессах.

Будем признательны читателям за замечания по содержанию выпущенных в серии книг, советы и пожелания по составу серии. Выражаем благодарность Г.А.Москаленко за качественный перевод-подстрочник с испанского языка на русский настоящей и предыдущей [1] книг серии, а также Б.А.Юхименко за подготовку на компьютере оригиналов-макетов этих книг.

Наш адрес : 220050, Республика Беларусь, Минск, Белорусский государственный университет, кафедра МО АСУ.

В.В.Краснопрошин,
Н.А.Лепешинский

ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ

Повсюду и всегда люди совершают ошибки и промахи вследствие забывчивости или небрежности. Даже при наличии самых мощных машин для хранения и обработки информации риск забыть что-либо никогда полностью не исчезнет. Поскольку мы находимся в окружении самых различных технологий, такое забывание может быть опасным, и поэтому необходима разработка методов профилактики через познание всевозможных причинно-следственных связей. Последовательности влияний (инциденций), цепочек вывода, следствий образуют сеть, в которой не всегда учитываются отдельные пути. Даже при двух или трех ступенях в рассуждениях могут быть пропущены возможные разветвления. Для того чтобы повысить эффективность исследований скрытых воздействий, используются компьютеры, для которых нужны соответствующие математические модели и методы. Данная книга претендует на изложение нескольких пригодных для этого моделей.

Все мы включены в системы и подсистемы разной природы: экономической, образовательной, профсоюзной, технологической. Окружающий нас мир — это ничто иное, как системы и подсистемы. Хотя в некоторых случаях можно составить четкие инструкции для управления (например, взлетом самолета, включением центрального отопления), всегда существует определенный риск небрежности или неблагоразумия, которого следует избежать. Риск не всегда бывает явным (заметным) или непосредственно ощущаемым; иногда он не очевиден и является следствием другого следствия, наслоением причин. Модели и методы, используемые для поиска скрытых воздействий, не совпадают с теми, которые описывают надежность систем. Они располагаются на предшествующем уровне анализа. Такие модели представляют собой графы со взвешенными дугами или вершинами. Весами дуг (вершин) могут быть числа из интервала [0,1] или доверительные интервалы с границами из [0,1]. Для анализа таких моделей может использоваться булева алгебра, или теория нечетких множеств, или теория "экспертонов". Методы не являются трудными ни для восприятия, ни для программирования. Они эффективны даже при большом объеме данных, когда следует использовать компьютер. Необходимые для изложения сведения из теории графов элементарны и по мере надобности приведены в книге.

Методы управления и методы исследования скрытых воздействий часто переплетаются и дополняют друг друга. Известный французский инженер и экономист Жан Форастье назвал скрытые воздействия следствиями второго поколения, особенно по отношению к политическим и социально-экономическим решениям, и отметил опасность неучета этих воздействий. Мы также осознаем эту опасность и надеемся, что разработанные нами методы помогут ее уменьшить. Иллюзией было бы считать, что этим самым предупреждается забывание. Тем не менее важным является постоянное устранение его причин. Это следует делать регулярно, так как в новых системах появляются новые следствия и цепочки выводов, которые могут быть неучтенными.

Детерминизм неприменим к анализу деятельности человека, предприятий, страны, общества. Механистическое понимание сложных систем уже исчерпало себя. Все вокруг является развивающимся и приспосабливающимся. Учет этого оказывается более трудным, но черезвычайно интересным. Настоящая книга не претендует на исчерпывающее изложение темы, однако может оказаться полезной в наше время, насыщенное информацией. Важность следствий второго, третьего и более высоких порядков заметна во всех сферах и областях принятия решений: в политике, экономике, предпринимательстве, технике, медицине, биологии и т.п. В книге приведены примеры применения предложенных методов. Они разработаны на основе данных, представленных экспериментами в каждой из соответствующих областей. Конечно, мы не настаиваем на полном принятии всех представленных оценок и у читателя может быть свое мнение по поводу их. Здесь следует иметь ввиду, что числами оценивались субъективные впечатления и примеры только иллюстрируют возможности методов.

Надеемся, что наши усилия были не напрасными, поскольку они позволили открыть широкий горизонт исследований.

I. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ. МОДЕЛИ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЕ ПОНЯТИЕ ИНЦИДЕНЦИИ

1. Введение

Концепция инциденции ассоциируется с идеей действия совокупности объектов на другую совокупность объектов или на саму себя. Так, хорошая погода имеет инциденцию на продажу летнего платья (благоприятную), на продажу зонтиков (неблагоприятную) и на посещаемость кинотеатров (неблагоприятную). Математически понятие инциденции может быть связано с общеизвестным понятием функции. Будем пользоваться им, переходя от самой простой (инциденция существует или не существует) к более сложным интерпретациям, включающим элементы рассуждений.

Понятие инциденции, которое встречается во всех действиях живых существ, внешне кажется очень простым, но заслуживает краткого научного объяснения. При рассуждениях чаще всего в явном виде его не используют, поскольку оно естественно и как бы автоматически возникает в процессе мышления. На самом же деле при достаточно сложных рассуждениях инциденции образуют пространственную сеть, в которой опущены многие этапы и не учтены выводы, разделенные более или менее осознанно. Даже в простейшей линейной цепочке выводов часто могут быть пропущены важные взаимодействия, и это приводит к искажению окончательно принимаемых решений. Плохо, если это случается в повседневной жизни, но, к сожалению, это бывает и на верхних уровнях принятия решений.

В наш век информатики и экспертных систем для наилучшего развития в условиях неопределенности необходимо предвидение. Предвидеть - это фактически полнее учитывать всевозможные, даже понимаемые субъективно, инциденции для аргументации действий и поступков.

Математический аппарат, используемый в рассмотренных ниже моделях, прост, и мы надеемся, что имеющихся в тексте объяснений, комментариев и примеров достаточно для его понимания. Сами модели легко программируются.

2. Инциденции первого порядка

Рассмотрим простой пример. Пусть A - множество объектов :

(2.1) $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$,

которое каким-то образом воздействует (будем говорить, имеет инциденцию) на множество B других объектов :

(2.2) $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

Можно считать, что если инциденция a_i на b_j существует, то значение пары (a_i,b_j) равно 1, и если этой инциденции не существует, то значение пары (a_i,b_j) равно 0. Совокупность значений, оцениваемых таким образом, определяет так называемую матрицу инциденций.

Рассмотрим, например, инциденцию множества A на множество B в виде матрицы

(2.3)

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0	1	0	1
a_2	0	0	1	0
a_3	1	0	1	0
a_4	0	0	0	0
a_5	0	1	0	0

Из матрицы видно, например, что $v(a_1,b_3) = 0$, $v(a_1,b_4) = 1$, $v(a_2,b_3) = 1$, $v(a_5,b_3) = 0$ и т.д. Отметим, что элемент a_4 не имеет инциденции ни на один из элементов множества B. Матрица инциденций однозначно задает так называемый граф инциденций - двусторонний граф, вершины которого соответствуют элементам множеств A и B ,а ориентированные дуги — единичным элементам матрицы и только им. Для матрицы (2.3) получается граф инциденций, изображенный на рис.2.1.

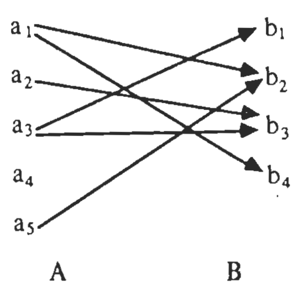


Рис. 2.1

В математике описываемое понятие называется многозначным отображением А в В. Можно использовать другую форму записи инциденций, в которой указывается, на какие элементы В имеет инциденцию каждый из элементов А:

$$(2.4)\qquad \begin{cases} \Gamma\{a_1\} = \{b_2, b_4\}, \\ \Gamma\{a_2\} = \{b_3\}, \\ \Gamma\{a_3\} = \{b1, b3\}, \\ \Gamma\{a_4\} = \varnothing, \\ \Gamma\{a_5\} = \{b_2\}. \end{cases}$$

Факт, что a_4 не имеет инциденции ни на один элемент из В, обозначается символом $\varnothing$ - пустым множеством.

Если a_i имеет инциденцию на b_j, то можно говорить, что в свою очередь b_j находится "под влиянием" a_i. Если в матрице инциденций (2.3) строки сделать столбцами и столбцы строками, то получим матрицу, которую будем называть матрицей влияний. Для нашего примера имеем:

(2.5)

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
b_1			1		
b_2	1				1
b_3		1	1		
b_4	1				

Достаточно изменить ориентацию всех дуг графа на рис.2.1, чтобы получить граф влияний. Запись инциденций в форме (2.4) для влияний будет иметь вид:

$$(2.6)\qquad \begin{cases} \Gamma^{-1}\{b_1\} = \{a_3\}, \\ \Gamma^{-1}\{b_2\} = \{a_1, a_5\}, \\ \Gamma^{-1}\{b_3\} = \{a_2, a_3\}, \\ \Gamma^{-1}\{b_4\} = \{a_1\}. \end{cases}$$

Итак, пусть рассматривается конечное множество А объектов

$$(2.7)\qquad A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\},$$

имеющее инциденцию на другое конечное множество В объектов

$$(2.8)\qquad B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}.$$

Можно считать, что если инциденция $a_l \in A$ на $b_j \in B$ существует, то значение v пары (a_i, b_j) равно 1, а если этой инциденции не существует, то значение v пары (a_i,b_j) равно 0. Матрица, образованная значениями всех этих пар, называется матрицей инциденций, а матрица, образованная значениями пар (b_j,a_i), — матрицей влияний.

Рассмотрим конкретный пример с оговоркой, что оценка степени инциденции только значениями 0 или 1 в излагаемой ситуации явно недостаточна. Будем расценивать этот фрагмент только как шаг к реально используемым моделям. Для автомобиля, пользующегося широким спросом, рассматриваются 6 технологических или коммерческих свойств:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 \text{ - мощность,} \\ a_2 \text{ - максимальная скорость,} \\ a_3 \text{ - тип подвески,} \\ a_4 \text{ - потребление горючего,} \\ a_5 \text{ - цена,} \\ a_6 \text{ - качество тормозной системы,} \end{array}\right. \tag{2.9}$$

и 5 качеств, ценимых водителями:

$$\left\{\begin{array}{l} b_1 \text{ - устойчивость на дороге,} \\ b_2 \text{ - безопасность,} \\ b_3 \text{ - комфорт,} \\ b_4 \text{ - престижность,} \\ b_5 \text{ - надежность.} \end{array}\right. \tag{2.10}$$

Водитель мог бы следующим образом составить матрицу инциденций перечисленных свойств на качества:

(2.11)

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1		1		1	
a_2				1	
a_3	1	1	1		
a_4			1		
a_5				1	
a_6	1	1			1

Это, конечно, только одна из возможных оценок водителя. Если в качестве оценок выбирать только 0 и 1, то трудно сформировать матрицу вида (2.11) и тем более ее использовать.

Отметим, что некоторые элементы A могут встретиться в B и наоборот. В некоторых случаях множества A и B совпадают. Тогда в матрице инциденций элементы главной диагонали будут равны 1, поскольку каждый объект имеет гипотетически полную инциденцию на самого себя. Рассмотрим пример матрицы инциденций, когда A=B. Пусть

(2.12) $\begin{cases} a_1 \text{ - климат,} \\ a_2 \text{ - сельское хозяйство,} \\ a_3 \text{ - здравоохранение,} \\ a_4 \text{ - промышленность,} \\ a_5 \text{ - образование;} \end{cases}$

(2.13) $\begin{cases} b_1 \text{ - климат,} \\ b_2 \text{ - сельское хозяйство,} \\ b_3 \text{ - здравоохранение,} \\ b_4 \text{ - промышленность,} \\ b_5 \text{ - образование.} \end{cases}$

Экономист мог бы оценить следующим образом инциденцию A на B:

(2.14)

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	1	1	1	0	0
a_2	0	1	1	1	0
a_3	0	0	1	0	1
a_4	1	1	0	1	0
a_5	0	0	1	1	1

Очевидно, что такие матрицы инциденций являются рефлексивными (главная диагональ образована из 1), но они несимметричны или симметричны в редких случаях. Например, климат имеет инциденцию на сельское хозяйство, но не наоборот. Здесь опять можно заметить трудности при формировании и использовании матриц только из значений 0 и 1.

Когда используется только одна матрица инциденций, говорят, что анализ отражает инциденции первого порядка. Перейдем далее к анализу того, что назовем инциденциями второго порядка.

3. Инциденции второго и более высоких порядков

Рассмотрим инциденцию множества A на множество B и инциденцию множества B на третье множество C. Пусть, например,

(3.1) $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4,\}$,

(3.2) $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$, (3.3) $C = \{c_1, c_2, c_3\}$.

Получаем инциденции, представленные двумя приведенными ниже матрицами и соответствующими графами инциденций (рис.3.1 и 3.2):

(3.4)

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
a_1	1			1	
a_2		1		1	1
a_3					1
a_4				1	

(3.5)

	c_1	c_2	c_3
b_1	1		
b_2			
b_3	1	1	
b_4		1	1
b_5	1		

В пустых клетках этих матриц подразумеваются нули.

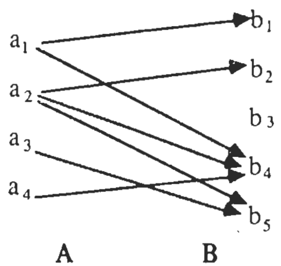


Рис. 3.1

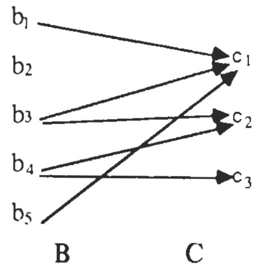


Рис. 3.2

Последовательное применение двух инциденций приводит к инциденции второго порядка (рис.3.3). Это инциденции элементов A на элементы C посредством B.

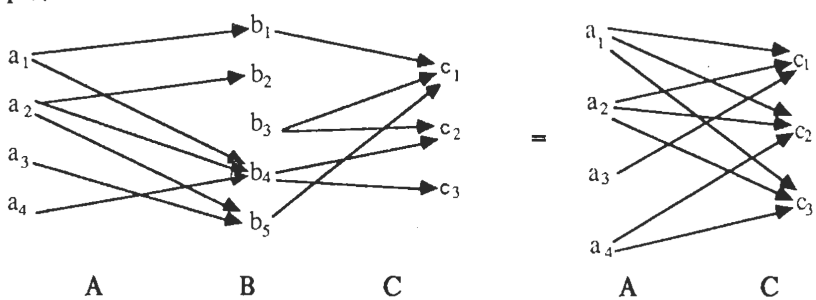


Рис. 3.3

Второму графу (правому) на рис.3.3 соответствует матрица инциденций второго порядка:

$$
(3.6)\qquad
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & c_1 & c_2 & c_3 \\
\hline
a_1 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
a_2 & 1 & 1 & 1 \\
\hline
a_3 & 1 & & \\
\hline
a_4 & & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

При записи инциденций в форме (2.4) получим :

$$
(3.7)\qquad
\begin{cases}
\Gamma_{AB}\{a_1\} = \{b_1, b_4\}, \\
\Gamma_{AB}\{a_2\} = \{b_2, b_4, b_5\}, \\
\Gamma_{AB}\{a_3\} = \{b_5\}, \\
\Gamma_{AB}\{a_4\} = \{b_4\},
\end{cases}
$$

$$
(3.8)\qquad
\begin{cases}
\Gamma_{BC}\{b_1\} = \{c_1\}, \\
\Gamma_{BC}\{b_2\} = \varnothing, \\
\Gamma_{BC}\{b_3\} = \{c_1, c_2\}, \\
\Gamma_{BC}\{b_4\} = \{c_2, c_3\}, \\
\Gamma_{BC}\{b_5\} = \{c_1\},
\end{cases}
$$

и, например, из (3.6)

$$
(3.9)\qquad
\begin{cases}
\Gamma_{AC}\{a_1\} = \{c_1, c_2, c_3\}, \\
\Gamma_{AC}\{a_2\} = \{c_1, c_2, c_3\}, \\
\Gamma_{AC}\{a_3\} = \{c_1\}, \\
\Gamma_{AC}\{a_4\} = \{c_2, c_3\}.
\end{cases}
$$

Математическая операция, позволяющая распознать инциденцию А на С, зная инциденции А на В и В на С, называется композицией максимум-минимум или композицией maxmin. Ниже будет приведена соответствующая общая формула.

Приступим к анализу рис.3.3. Если существует хотя бы один путь от какой-либо вершины a_i к какой-то вершине c_k через промежуточную вершину b_j, т. е. тройка (a_i,b_j,c_k), то будет существовать дуга из a_i в c_k, т. е. пара (a_i,c_k). Таким способом образуется граф справа на рис.3.3 и соответствующая ему матрица инциденций второго порядка А на С.

Выведем математическую формулу, которая позволит построить матрицу (3.6) исходя из матриц (3.4) и (3.5). Пусть $\mu(a_i,b_j)$ - оценка клетки (a_i,b_j) в матрице (3.4), равная 0 или 1. Для матрицы (3.5) это будет оценка $\mu(b_j,c_k)$.

Введем два операторных символа. Пусть символ $\wedge$ означает выбор минимального (наименьшего) из двух элементов, а символ $\vee$ - максимального (наибольшего) из двух элементов. При этих обозначениях найдем оценки : клетки (a_1,c_1)

$$
\begin{aligned}
\mu(a_1, c_1) = {} & (\mu(a_1, b_1) \wedge \mu(b_1, c_1)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_2) \wedge \mu(b_2, c_1)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_3) \wedge \mu(b_3, c_1)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_4) \wedge \mu(b_4, c_1)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_5) \wedge \mu(b_5, c_1)) = \\
& = (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) = \\
& = 1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 1,
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

клетки (a_1, c_2)

$$
\begin{aligned}
\mu(a_1, c_2) = {} & (\mu(a_1, b_1) \wedge \mu(b_1, c_2)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_2) \wedge \mu(b_2, c_2)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_3) \wedge \mu(b_3, c_2)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_4) \wedge \mu(b_4, c_2)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_5) \wedge \mu(b_5, c_2)) = \\
& = (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) = \\
& = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 1 \vee 0 = 1,
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

клетки (a_3, c_3)

$$
\begin{aligned}
\mu(a_1, c_3) = {} & (\mu(a_1, b_1) \wedge \mu(b_1, c_3)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_2) \wedge \mu(b_2, c_3)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_3) \wedge \mu(b_3, c_3)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_4) \wedge \mu(b_4, c_3)) \vee \\
& \vee(\mu(a_1, b_5) \wedge \mu(b_5, c_3)) = \\
& = (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) = \\
& = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

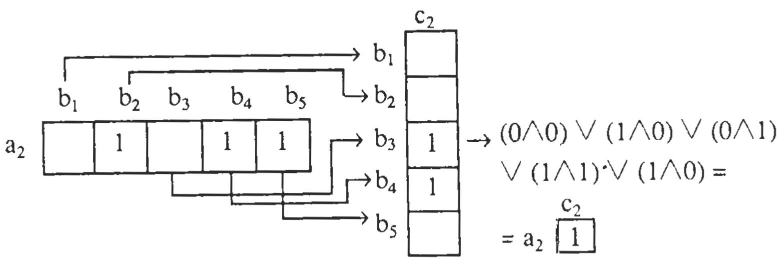
и так для всех элементов A, B и C. В общем случае, для всех a_i, b_j и c_k, где $i=1,2,3,4$; $j=1,2,3,4,5$; $k=1,2,3$, получим

$$
\mu(a_i, c_k) = \bigvee_j (\mu(a_i, b_j) \wedge \mu(b_j, c_k)),
\tag{3.13}
$$

что определяет композицию maxmin для инциденции A на C посредством B, т. е. исходя из инциденций A на B и B на C.

Наглядно процедуру получения оценок клеток (a_i, c_k) можно представить в следующем виде. Так, если взять строку a_2 из (3.4) и столбец c_3 из (3.5), получаем:

(3.14)



Рассмотрим на простом примере, какую пользу может принести введение инциденции второго порядка.

Предположим, что лицо (или лица), которое должно оценивать элементарные инциденции, представило непосредственные инциденции A на C в виде матрицы

(3.15)

	c_1	c_2	c_3
a_1	1		1
a_2	1	1	1
a_3	1		
a_4		1	

С другой стороны, используя инциденции A на B и B на C и операцию композиции maxmin, можно получить матрицу (3.6). Сравнивая (3.6) и (3.15), видим, что элементы в (3.15) оценены по какой-то причине неправильно. Действительно, пары (a_1,c_2) и (a_4,c_3) имеют значения 0 в (3.15) и 1 в (3.6). Можно сказать, что воздействия (a_1,c_2) и (a_4,c_3) являются скрытыми. Из рис.3.3 видно, что (a_1,c_2) должно было бы приобрести значение 1 в (3.15), поскольку есть дуги (a_1,b_4) и (b_4,c_2). Также (a_4,c_2) должно было бы иметь значение 1 в (3.15), поскольку есть дуги (a_4,b_4) и (b_4,c_2).

Может также случиться, что, наоборот, одна пара будет иметь значение 1 в (3.15) и 0 в (3.6). В этом случае целесообразно вернуться к анализу (3.15) для повторной оценки воздействий.

На этом примере видно, что степень субъективности оценок инциденций можно проверить, если известно, что они формируются через промежуточные объекты.

Теперь можно обобщить рассматриваемую схему и ввести инциденции третьего, четвертого и последующих порядков. Пусть M_{AB} - матрица инциденций A на B, M_{BC} - матрица инциденций B на C, M_{CD} - матрица инциденций C на D и т. д. Композиция maxmin, представленная математической формулой (3.13), должна повторяться необходимое число раз.

Для краткости записей обозначим композицию maxmin символом $\circ$. Тогда (3.13) будет иметь вид

$$M_{AC} = M_{AB} \circ M_{BC}\,. \tag{3.16}$$

Для инциденции третьего порядка получим

$$M_{AD} = M_{AB} \circ M_{BC} \circ M_{CD}\,. \tag{3.17}$$

Легко проверяется, что композиция maxmin обладает свойством ассоциативности, т.е.

$$(3.18) \qquad M_{AB} \circ (M_{BC} \circ M_{CD}) = (M_{AB} \circ M_{BC}) \circ M_{CD} \ ,$$

и поэтому порядок применения этой операции в выражениях типа (3.17) не имеет значения.

4. Использование нечетких матриц

В нечетком отношении(или в нечеткой матрице) $\underset{\sim}{M}$ оценка пары $(x_i,x_j) \in R \subset A \times B$, где A и B - заданные конечные множества или исходные данные, вместо того, чтобы принимать значение 0 или 1 (инциденция или неинциденция), может принять любое значение между 0 и 1, т. е.

$$(4.1) \qquad \forall (x_i, x_j) \in \underset{\sim}{M} \qquad v(x_i, x_j) \in [0, 1] .$$

Так, если A и B заданы в виде (2.1) и (2.2), то можно представить нечеткое отношение или нечеткое подмножество $A \times B$ в виде

(4.2)

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	.3	.7	0	1
a_2	.2	1	.4	0
a_3	.9	0	0	.3
a_4	.2	0	.8	1
a_5	0	.7	0	.5

В нашем примере в (4.2) оценки для простоты представлены числами с одним знаком после точки, хотя можно взять любое желаемое количество знаков.

По аналогии с рис.2.1 нечеткие отношения также можно представлять графами, причем на дугах указывать оценки соответствующих пар. Отсутствие дуги означает, что соответствующая инциденция имеет нулевую оценку. Таким образом, нечеткая матрица (4.2) представляется рис.4.1.

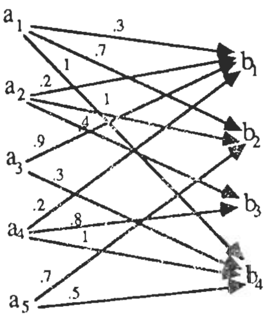


Рис. 4.1

Введение оттеночной оценки между 0 и 1 позволяет установить определенные уровни в понятии инциденции. Например, можно установить семантическое соответствие для 11 значений от 0 до 1 (так называемая одиннадцатиуровневая инциденция):

$$
(4.3) \qquad \begin{cases} 0 & \text{- без инциденции,} \\ 0.1 & \text{- практически без инциденции,} \\ 0.2 & \text{- почти без инциденции,} \\ 0.3 & \text{- очень слабая инциденция,} \\ 0.4 & \text{- слабая инциденция,} \\ 0.5 & \text{- средняя инциденция,} \\ 0.6 & \text{- ощутимая инциденция,} \\ 0.7 & \text{- значительная инциденция,} \\ 0.8 & \text{- сильная инциденция,} \\ 0.9 & \text{- очень сильная инциденция,} \\ 1 & \text{- наибольшая инциденция.} \end{cases}
$$

Однако субъективность понятия инциденции и введенных соответствий может препятствовать их широкому использованию. Возможно, что предпочтительнее окажутся оценки истинности высказывания

P : существует инциденция

и при этом

$$
(4.4) \qquad v(P) = \begin{cases} 0 & \text{- выражение ложно,} \\ 0.1 & \text{- практически ложно,} \\ 0.2 & \text{- почти ложно,} \\ 0.3 & \text{- достаточно ложно,} \\ 0.4 & \text{- скорее ложно, чем истинно,} \\ 0.5 & \text{- ни истинно, ни ложно,} \\ 0.6 & \text{- скорее истинно, чем ложно,} \\ 0.7 & \text{- достаточно истинно,} \\ 0.8 & \text{- почти истинно,} \\ 0.9 & \text{- практически истинно,} \\ 1 & \text{- истинно.} \end{cases}
$$

Если оценки уровня инциденции выбираются из интервала $[0,a]$, т. е. оценка $k \in [0,a]$, то

$$
(4.5) \qquad v(P) = k / a ,
$$

и если этот интервал имеет вид $[a_1,a_2]$, то

$$
(4.6) \qquad v(P) = (k - a_1) / (a_2 - a_1) , \quad k,a_1,a_2 \in R^+ .
$$

В случае необходимости возможно использование более сложных, чем (4.6), формул.

В качестве примера рассмотрим снова матрицу инциденций, касающуюся (2.9) и (2.10), через нечеткие оценки. Водитель мог бы предложить следующую нечеткую матрицу :

(4.7)		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
	a_1	.2	.7	.4	1	0
	a_2	0	.2	.5	1	.6
	a_3	1	1	1	0	.4
	a_4	0	0	.4	0	.2
	a_5	.6	.8	.7	1	.6
	a_6	1	1	.3	0	.8

Для примера (2.12) и (2.13) экономист мог бы дать следующие оценки:

(4.8)		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
	a_1	1	.9	.8	.1	.1
	a_2	.1	1	.8	.3	.1
	a_3	0	.1	1	.1	.4
	a_4	.3	.2	.1	1	0
	a_5	0	.3	.8	.8	1

В дальнейшем мы увидим преимущества использования нечетких оценок над двоичными, хотя уже можно догадаться, что введение оттеночности позволяет добиться более точного выражения мысли.

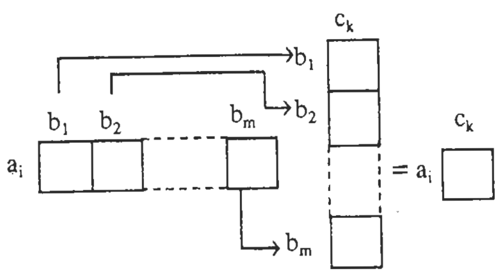
Перейдем сейчас к рассмотрению нечетких матриц инциденций второго и более высоких порядков. Для этого еще раз воспользуемся композицией maxmin, задаваемой формулой (3.13), с заменой оценок μ на оценки v при всех инциденциях.

Таким образом, для всех a_i, b_j и c_k

$$(4.9)\qquad v(a_i, c_k) = \bigvee_j \left(v(a_i, b_j) \wedge v(b_j, c_k)\right).$$

Как и в (3.14), можно использовать схему этой композиции:

(4.10)



Пусть даны три множества:

(4.11) $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$,

(4.12) $B = \{b_1, b_2, b_3\}$,

(4.13) $C = \{c_1, c_2, c_3, c_4, c_5\}$

и нечеткие матрицы инциденций A на B и B на C:

$$(4.14)\qquad \underset{\sim}{M}_{AB} = \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .3 & 0 & .8 \\ \hline a_2 & 1 & 0 & .6 \\ \hline a_3 & .5 & .5 & .7 \\ \hline a_4 & .3 & 0 & .8 \\ \hline \end{array}$$

$$(4.15)\qquad \underset{\sim}{M}_{BC} = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ \hline b_1 & .9 & 1 & 1 & .4 & 0 \\ \hline b_2 & .2 & .5 & .5 & .3 & .9 \\ \hline b_3 & .8 & .6 & .1 & .2 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Композиция maxmin вычисляется следующим образом:

$$(4.16)\qquad \begin{cases} v(a_1, c_1) = (v(a_1,b_1) \wedge v(b_1, c_1)) \vee \\ \qquad \vee (v(a_1, b_2) \wedge v(b_2, c_1)) \vee \\ \qquad \vee (v(a_1, b_3) \wedge v(b_3, c_1)) = \\ \qquad = (0.3 \wedge 0.9) \vee (0 \wedge 0.2) \vee (0.8 \wedge 0.8) = 0.8, \\ v(a_1, c_2) = (v(a_1,b_1) \wedge v(b_1, c_2)) \vee \\ \qquad \vee (v(a_1, b_2) \wedge v(b_2, c_2)) \vee \\ \qquad \vee (v(a_1, b_3) \wedge v(b_3, c_2)) = \\ \qquad = (0.3 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0.5) \vee (0.8 \wedge 0.6) = 0.6, \\ v(a_1, c_3) = (0.3 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0.5) \vee (0.8 \wedge 0.1) = 0.3, \\ v(a_1, c_4) = (0.3 \wedge 0.4) \vee (0 \wedge 0.3) \vee (0.8 \wedge 0.2) = 0.3, \\ v(a_1, c_5) = (0.3 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0.9) \vee (0.8 \wedge 0) = 0, \\ v(a_2, c_1) = (1 \wedge 0.9) \vee (0 \wedge 0.2) \vee (0.6 \wedge 0.8) = 0.9, \\ v(a_2, c_2) = (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0.5) \vee (0.6 \wedge 0.6) = 1, \end{cases}$$

т. е. получаем

(4.17) $\underset{\sim}{M}_{AB} \circ \underset{\sim}{M}_{BC} = \underset{\sim}{M}_{AC}$

или конкретно

	b_1	b_2	b_3
a_1	.3	0	.8
a_2	1	0	.6
a_3	.5	.5	.7
a_4	.3	0	.8

$\circ$

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
b_1	.9	1	1	.4	0
b_2	.2	.5	.5	.3	.9
b_3	.8	.6	.1	.2	0

=

	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5
a_1	.8	.6	.3	.3	0
a_2	.9	1	1	.4	0
a_3	.7	.6	.5	.4	.5
a_4	.8	.6	.3	.3	0

Если $\underset{\sim}{M}_{AB}$ имеет l строк и m столбцов, а $\underset{\sim}{M}_{BC}$ — m строк и n столбцов, то $\underset{\sim}{M}_{AC}$ должна иметь l строк и n столбцов. В противном случае композиция была бы невозможна.

Отметим сейчас два свойства матриц инциденций (нечетких или двоичных). Если даны три матрицы инциденций $\underset{\sim}{A}_{l\times m}$, $\underset{\sim}{B}_{m\times n}$, $\underset{\sim}{C}_{n\times p}$, то выполняется

(4.18) $\underset{\sim}{A}_{l\times m} \circ \underset{\sim}{B}_{m\times n} = \underset{\sim}{B}_{m\times n} \circ \underset{\sim}{A}_{l\times m}$,

причем сравнение композиций может проводиться лишь в том случае, если l=m=n, и только в частных случаях может выполняться равенство. В любом случае также выполняются свойства ассоциативности

(4.19) $\underset{\sim}{A}_{l\times m} \circ (\underset{\sim}{B}_{m\times n} \circ \underset{\sim}{C}_{n\times p}) = (\underset{\sim}{A}_{l\times m} \circ \underset{\sim}{B}_{m\times n}) \circ \underset{\sim}{C}_{n\times p}$.

Ниже рассмотрим и другие свойства.

Представим сейчас композицию (4.17) в форме графов (рис. 4.2).

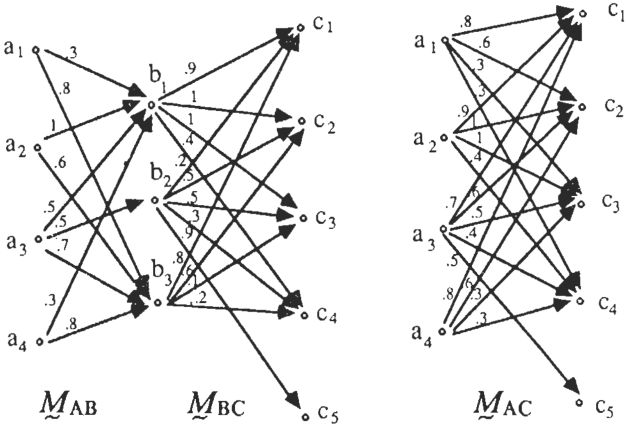


Рис. 4.2

До рассмотрения других свойств матриц инциденций разберем далее практический пример с тем, чтобы читатель смог увидеть полезность введенных понятий.

5. Пример исследования скрытых воздействий с помощью матриц инциденций

Пример взят из работ [2], [3], посвященных методам моделирования и методам принятия управленческих решений в условиях неопределенности. Советуем читателям, заинтересованным в исследовании скрытых воздействий, обратить внимание на методы моделирования и исследования операций как из-за многочисленных аналогий между различными моделями, так и из-за многих однотипных действий при использовании компьютеров для обработки данных. Рассматриваемый пример является расширением в область нечеткости трехзначной (с тремя уровнями оценки) матрицы инциденций, введенной Николасом Валери, издателем и директором журнала " New Scientist" (Великобритания). Это расширение поможет нам пояснить, как применяются матрицы инциденций для исследования скрытых воздействий или следствий второго порядка. В этом случае группой экспертов после предварительных обсуждений устанавливаются оценки экономических или социальных взаимосвязей. Конечно, мы не будем считать, что это окончательные оценки, имея в виду чисто учебную цель примера. Рассмотрим 12 секторов, определяющих жизнедеятельность людей: 1) климат; 2) население; 3) сельское хозяйство; 4) здравоохранение; 5) образование; 6) наука и техника; 7) промышленность; 8) энергетика; 9) окружающая среда; 10) транспорт; 11) связь; 12) оборона.

Построим квадратную матрицу 12×12, строки и столбцы которой соответствуют введенным секторам, а элементы представляют оценки экспертов. Поскольку матрица рефлексивна и на ее главной диагонали будут стоять единицы, то необходимо установить 132 оценки (12×12-12).

Т а б л и ц а 5.1

$\underset{\sim}{M}_{(1)}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	.2	.9	.8	.1	.5	.1	.5	.8	.2	.3	.6
2	0	1	.3	.9	.8	.6	.5	.7	.6	.8	.5	1
3	.1	.4	1	.8	.1	.1	.3	.2	1	.2	0	.1
4	0	.6	.1	1	.4	.2	.1	.1	.2	0	0	.4
5	0	1	.3	.8	1	1	.8	.3	.5	.2	.2	.4
6	.2	.3	.4	.6	.5	1	1	1	.8	1	1	1
7	.3	.2	.2	.1	0	.3	1	.2	.8	.4	.3	.8
8	.2	0	.1	0	0	.2	1	1	.9	1	0	.6
9	.2	1	.3	1	.3	.3	.5	0	1	.3	.1	0
10	.1	.8	.2	.3	0	0	.8	.6	.2	1	.2	.4
11	0	.3	0	.1	0	.2	.3	.2	.3	.3	1	.3
12	0	.8	.1	0	.1	1	.6	.5	0	.2	.1	1

В табл. 5.1 приведены инциденции, оцененные экспертами. Так, климат (строка 1) имеет инциденцию, оцениваемую в 0.8 на здравоохранение. Это важный фактор для здравоохранения (строка 4), но он не единственный. Образование (строка 5) имеет инциденцию, оцениваемую в 1 на население (столбец 2): для ближайшего будущего образование оказывается существенным для населения и т.д.

Таким образом, группа экспертов дала свои оценки для прямых непосредственных воздействий. Попытаемся обнаружить воздействия второго порядка с помощью следующих расчетов:

(5.1) $$\underset{\sim}{M}_{(2)} = \underset{\sim}{M}_{(1)} \circ \underset{\sim}{M}_{(1)} .$$

Легко доказать, что если матрица $\underset{\sim}{M}$ является рефлексивной (т.е. ее главная диагональ состоит из единиц), элементы матрицы будут не меньше, чем соответствующие элементы матрицы $\underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{M}$, т.е.

(5.2) $$\underset{\sim}{M} \in \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{M} .$$

Как будет показано ниже, это важно, поскольку можно будет использовать разность

(5.3) $$\underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{M} - \underset{\sim}{M}$$

для исключения воздействий первого порядка из воздействий второго порядка, задаваемых матрицей $\underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{M}$. Сначала вычислим

(5.4) $$\underset{\sim}{M}_{(2)} = \underset{\sim}{M}_{(1)} \circ \underset{\sim}{M}_{(1)}.$$

Это приводит к матрице, представленной табл. 5.2.

Т а б л и ц а 5.2

$\underset{\sim}{M}_{(2)}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	.8	.9	.8	.5	.6	.6	.5	.9	.5	.5	.6
2	.3	1	.4	.9	.8	1	.8	.7	.7	.8	.6	1
3	.3	1	1	1	.4	.4	.5	.4	1	.4	.4	.4
4	.2	.6	.3	1	.6	.6	.5	.6	.6	.6	.5	.6
5	.3	1	.4	.9	1	1	1	1	.8	1	1	1
6	.3	.8	.4	.8	.5	1	1	1	.9	1	1	1
7	.3	.8	.3	.8	.3	.8	1	.5	.8	.4	.3	.8
8	.3	.9	.3	.9	.3	.6	1	1	.9	1	.3	.8
9	.3	1	.3	1	.8	.6	.5	.7	1	.8	.5	1
10	.3	.8	.3	.8	.8	.6	.8	.7	.8	1	.5	.8
11	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	1	.3
12	.3	.8	.4	.8	.8	1	1	1	.8	1	1	1

Вычислим далее

(5.5) $$\underset{\sim}{M}'_{(2)} = \underset{\sim}{M}_{(2)} - \underset{\sim}{M}_{(1)}$$

с целью выявления воздействий второго порядка. Получим матрицу, представленную табл. 5.3.

Сравнение элементов приведенных матриц (см. табл. 5.1 — 5.3) позволяет установить скрытые воздействия (инциденции второго порядка). Выпишем наиболее значимые из них:

(5.6) $$\left\{\begin{array}{ll}
(9 \longrightarrow 12) & \text{окружающая среда - оборона,} \\
(8 \longrightarrow 2) & \text{энергетика - население,} \\
(8 \longrightarrow 4) & \text{энергетика - здравоохранение,} \\
(12 \longrightarrow 11) & \text{оборона - связь,} \\
(5 \longrightarrow 10) & \text{образование - транспорт,} \\
(5 \longrightarrow 11) & \text{образование - связь,} \\
(10 \longrightarrow 5) & \text{транспорт - образование,} \\
(12 \longrightarrow 4) & \text{оборона - здравоохранение,} \\
(12 \longrightarrow 9) & \text{оборона - окружающая среда,} \\
(12 \longrightarrow 10) & \text{оборона - транспорт.}
\end{array}\right.$$

Таблица 5.3

$\underset{\sim}{M}_{(2)} - \underset{\sim}{M}_{(1)}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0	.6	0	0	.4	.1	.5	0	.1	.3	.2	0
2	.3	0	.1	0	0	.4	.3	0	.1	0	.1	0
3	.2	.6	0	.2	.3	.3	.2	.2	0	.2	.4	.3
4	.2	0	.2	0	.2	.4	.4	.5	.4	.6	.5	.2
5	.3	0	.1	.1	0	0	.2	.7	.3	.8	.8	.6
6	.1	.5	0	.2	0	0	0	0	.1	0	0	0
7	0	.6	.1	.7	.3	.5	0	.3	0	0	0	0
8	.1	.9	.2	.9	.3	.4	0	0	0	0	.3	.2
9	.1	0	0	0	.5	.3	0	.7	0	.5	.4	1
10	.2	0	.1	.5	.8	.6	0	.1	.6	0	.3	.4
11	.3	0	.3	.2	.3	.1	0	.1	0	0	0	0
12	.3	0	.3	.8	.7	0	.4	.5	.8	.8	.9	0

Восстановим теперь промежуточные инциденции, с помощью которых можно обнаружить скрытые воздействия. Для этого используем (табл.5.1) и определим наибольший из минимумов между каждым элементом строки входа и соответствующим элементом выхода. Получим:

(5.7) $(9 \longrightarrow 12):$ $9 \xrightarrow{1} 2 \xrightarrow{1} 12$ 1
вместо $9 \xrightarrow{\quad 0 \quad} 12$ 0 $1 - 0 = 1$

(5.8) $(8 \longrightarrow 2):$ $8 \xrightarrow{0.9} 9 \xrightarrow{1} 2$ 0.9
вместо $8 \xrightarrow{\quad 0 \quad} 2$ 0 $0.9 - 0 = 0.9$

(5.9) $(8 \longrightarrow 4):$ $8 \xrightarrow{0.9} 9 \xrightarrow{1} 4$ 0.9
вместо $8 \xrightarrow{\quad 0 \quad} 4$ 0 $0.9 - 0 = 0.9$

(5.10) $(12 \longrightarrow 11):$ $12 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{1} 11$ 1
вместо $12 \xrightarrow{\quad 0.1 \quad} 11$ 0.1 $1 - 0.1 = 0.9$

(5.11) $(5 \longrightarrow 10):$ $5 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{1} 10$ 1
вместо $5 \xrightarrow{\quad 0.2 \quad} 10$ 0.2 $1 - 0.2 = 0.8$

(5.12) $(5 \longrightarrow 11):$ $5 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{1} 11$ 1
вместо $5 \xrightarrow{\quad 0.2 \quad} 11$ 0.2 $1 - 0.2 = 0.8$

(5.13)	(10 $\longrightarrow$ 5) :	$10 \xrightarrow{0.8} 2 \xrightarrow{0.8} 5$	0.8	
вместо		$10 \xrightarrow{\quad 0 \quad} 5$	0	0.8 - 0 = 0.8
(5.14)	(12 $\longrightarrow$ 10) :	$12 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{1} 10$	1	
вместо		$12 \xrightarrow{\quad 0.2 \quad} 10$	0.2	1 - 0.2 = 0.8
(5.15)	(12 $\longrightarrow$ 9) :	$12 \xrightarrow{1} 6 \xrightarrow{0.8} 9$	0.8	
вместо		$12 \xrightarrow{\quad 0 \quad} 9$	0	0.8 - 0 = 0.8
(5.16)	(12 $\longrightarrow$ 4) :	$12 \xrightarrow{0.8} 2 \xrightarrow{0.9} 4$	0.8	
вместо		$12 \xrightarrow{\quad 0 \quad} 4$	0	0.8 - 0 = 0.8.

Попытаемся интерпретировать некоторые из этих результатов. Например, непосредственно окружающая среда (строка 9) не оказывает никакого влияния на оборону (столбец 12), но проявляется вторичное воздействие через население (строка 2): лучше защищается собственная страна, чем иностранная территория. Оборона главным образом занимается защитой собственного населения. Подобным же образом энергетика (строка 8) не оказывает непосредственного влияния на население (столбец 2), но существует важное вторичное воздействие через окружающую среду (строка 9), т. е. очень активный вторичный эффект загрязнения не принимался во внимание.

Оставим читателю анализ и объяснение остальных перечисленных выше вторичных воздействий ((5.9) - (5.16)). Кроме того, можно изучить вторичные воздействия со значениями отклонений, меньших 0.8.

Конечно, детальные исследования должны были бы включать значительно большее количество секторов (параметров). Интуитивно ясно, что чем большее число параметров рассматривается (т. е. чем выше размерность матрицы $\underset{\sim}{M}_{(1)}$), тем больше возможностей существует для выявления значительного числа скрытых воздействий. Сразу же возникает необходимость использования компьютера.

В определенных случаях могут изучаться воздействия третьего порядка. С этой целью вычисляется разность $\underset{\sim}{M}_{(3)} - \underset{\sim}{M}_{(2)}$ для исключения воздействий второго порядка из воздействий второго и третьего порядков. Здесь появляется еще больше вариантов при анализе возможных косвенных воздействий.

6. Второй пример (с прямоугольной матрицей)

Прежде всего напомним одно из свойств прямоугольных матриц. Известно, что единичная матрица - это матрица размерности nxn, у которой на главной диагонали стоят единицы, а все остальные элементы равны нулю. Обозначим эту матрицу через U_{nxn}. Если $\underset{\sim}{M}_{mxn}$- нечеткая матрица, то имеем

(6.1) $$\underset{\sim}{M}_{mxn} \circ U_{nxn} = \underset{\sim}{M}_{mxn}$$

или

(6.2) $$U_{mxm} \circ \underset{\sim}{M}_{mxn} = \underset{\sim}{M}_{mxn} .$$

Пусть $\underset{\sim}{B}_{nxn}$ - рефлексивная нечеткая матрица. Если вычислить $\underset{\sim}{M}_{mxn} \circ \underset{\sim}{B}_{nxn}$, то всегда

(6.3) $$\underset{\sim}{M}_{mxn} \subset \underset{\sim}{M}_{mxn} \circ \underset{\sim}{B}_{nxn} ,$$

так как $\underset{\sim}{B}_{nxn} \supset U_{nxn}$.

Аналогично если $\underset{\sim}{A}_{mxm}$- рефлексивная нечеткая матрица, то для матрицы $\underset{\sim}{A}_{mxm} \circ \underset{\sim}{M}_{mxn}$ получим :

(6.4) $$\underset{\sim}{M}_{mxn} \subset \underset{\sim}{A}_{mxm} \circ \underset{\sim}{M}_{mxn} .$$

Объединяя (6.3) и (6.4), можно записать:

(6.5) $$\underset{\sim}{M}_{mxn} \subset \underset{\sim}{A}_{mxm} \circ \underset{\sim}{M}_{mxn} \circ \underset{\sim}{B}_{nxn} .$$

Если ввести $\underset{\sim}{M}'_{mxn} = \underset{\sim}{A}_{mxm} \circ \underset{\sim}{M}_{mxn} \circ \underset{\sim}{B}_{nxn}$, то получим

(6.6) $$\underset{\sim}{M}_{mxn} \subset \underset{\sim}{M}'_{mxn} .$$

Если $\underset{\sim}{M}$ - матрица инциденций элементов A на элементы B , т.е.

(6.7) $$\underset{\sim}{M} \subset A \times B ,$$

то, определив воздействия второго порядка, получим

(6.8) $$\underset{\sim}{A} \subset A \times A$$

и

(6.9) $$\underset{\sim}{B} \subset B \times B ,$$

где $\underset{\sim}{A}$ представляет собой инциденции элементов A на A и $\underset{\sim}{B}$ — инциденции элементов B на B. Матрицей, которая задает воздействия первого и второго порядков, является

(6.10) $$\underset{\sim}{M}^* = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B} ,$$

и скрытые воздействия будут получены после вычисления

(6.11) $$\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{M}^* - \underset{\sim}{M} .$$

Рассмотрим простой числовой пример. Пусть

(6.12) $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

и

(6.13) $B = \{b_1, b_2, b_3\}$.

На первой стадии эксперты определяют элементы матрицы

(6.14)

	b_1	b_2	b_3
a_1	.7	1	.2
a_2	0	.3	.4
a_3	.9	.2	0
a_4	.6	.7	0

Затем экспертов просят, чтобы они оценили инциденции элементов A на A и инциденции элементов B на B. В результате получим матрицы:

$$
\underset{\sim}{A} = \begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline
a_1 & 1 & .6 & .2 & 0 \\ \hline
a_2 & .7 & 1 & 1 & .3 \\ \hline
a_3 & .4 & .5 & 1 & .8 \\ \hline
a_4 & .2 & .4 & .6 & 1 \\ \hline
\end{array} \tag{6.15}
$$

$$
\underset{\sim}{B} = \begin{array}{c|c|c|c|}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline
b_1 & 1 & .4 & .3 \\ \hline
b_2 & .7 & 1 & .9 \\ \hline
b_3 & 0 & .5 & 1 \\ \hline
\end{array} \tag{6.16}
$$

По формуле (6.10) вычислим

$$
\underset{\sim}{M}^* = \begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline
a_1 & 1 & .6 & .2 & 0 \\ \hline
a_2 & .7 & 1 & 1 & .3 \\ \hline
a_3 & .4 & .5 & 1 & .8 \\ \hline
a_4 & .2 & .4 & .6 & 1 \\ \hline
\end{array}
\circ
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline
a_1 & .7 & 1 & .2 \\ \hline
a_2 & 0 & .3 & .4 \\ \hline
a_3 & .9 & .2 & 0 \\ \hline
a_4 & .6 & .7 & 0 \\ \hline
\end{array}
\circ \tag{6.17}
$$

$$
\circ
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline
b_1 & 1 & .4 & .3 \\ \hline
b_2 & .7 & 1 & .9 \\ \hline
b_3 & 0 & .5 & 1 \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline
a_1 & .7 & 1 & .9 \\ \hline
a_2 & .9 & .7 & .7 \\ \hline
a_3 & .9 & .7 & .7 \\ \hline
a_4 & .7 & .7 & .7 \\ \hline
\end{array}
$$

и далее

$$
\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{M}^* - \underset{\sim}{M} = \tag{6.18}
$$

$$
=
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline
a_1 & .7 & 1 & .9 \\ \hline
a_2 & .9 & .7 & .7 \\ \hline
a_3 & .9 & .7 & .7 \\ \hline
a_4 & .7 & .7 & .7 \\ \hline
\end{array}
-
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline
a_1 & .7 & 1 & .2 \\ \hline
a_2 & 0 & .3 & .4 \\ \hline
a_3 & .9 & .2 & 0 \\ \hline
a_4 & .6 & .7 & 0 \\ \hline
\end{array}
=
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline
a_1 & 0 & 0 & .7 \\ \hline
a_2 & .9 & .4 & .3 \\ \hline
a_3 & 0 & .5 & .7 \\ \hline
a_4 & .1 & 0 & .7 \\ \hline
\end{array}
$$

В матрице D проявляются воздействия второго порядка для (a_1, b_3), (a_2,b_1), (a_3,b_3), (a_4,b_3).

Сейчас уместно сделать несколько замечаний.

Если требуется установить только инциденции элементов B на B, достаточно вычислить

(6.19) $\quad \underset{\sim}{M}' = \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}$.

Если же интересны только инциденции элементов A на A, достаточно вычислить

(6.20) $\quad \underset{\sim}{M}'' = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}$.

В действительности $\underset{\sim}{M}^*$ выражает совместные воздействия от $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{B}$; эти вторичные эффекты будем называть сопряженными воздействиями.

В частном случае, когда A = B и $\underset{\sim}{A}$ - квадратная рефлексивная матрица, получаем:

(6.21) $\quad \underset{\sim}{M}' = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}^2$,

(6.22) $\quad \underset{\sim}{M}'' = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{A} = \underset{\sim}{A}^2$.

Сопряженные воздействия должны применяться только один раз, поскольку далее уже будет вычисляться A^3.

7. Использование Ф-нечетких матриц

Элементы Ф-нечеткой матрицы инциденций оцениваются через доверительные интервалы $[a_1, a_2] \subseteq [0,1]$. Например, при исходных множествах A и B, задаваемых элементами из(2.1) и (2.2), Ф-нечеткая матрица A×B может иметь вид

(7.1)

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[.3, .5]	.7	[0, .4]	1
a_2	0	[.8, 1]	.3	[.2, .5]
a_3	[.1, .2]	[.8, 1]	[.4, .5]	1
a_4	1	[0, 1]	[.3, .6]	.2
a_5	.7	.8	[.4, .6]	.5

где оценка a в виде числа понимается как интервал [a,a].

Операции min ($\wedge$) и max ($\vee$), используемые для нечетких значений, вводятся и для доверительных интервалов $[a_1, a_2] \subseteq [0,1]$ так, что

(7.2) $\quad [m_1, m_2] (\wedge) [n_1, n_2] = [m_1 \wedge n_1, m_2 \wedge n_2]$,

(7.3) $\quad [m_1, m_2] (\vee) [n_1, n_2] = [m_1 \vee n_1, m_2 \vee n_2]$.

Ниже мы введем также другие операции.

Преимущество Ф-нечеткого отношения по сравнению с нечетким отношением состоит в том, что для эксперта расширяется поле субъективности. При оценках экспертов может использоваться одиннадцатиуровневая система, задаваемая уровнями (4.3) или (4.4). Так, в случае использования (4.3) интервал

(7.4) $\quad$ [.2, .4] = [почти без инциденции, слабая инциденция].

Итак, при оценках элементов Ф-нечеткой матрицы в виде доверительных интервалов можно записать вместо (4.1)

(7.5) $\quad \forall x_i, x_j \in \underset{\sim}{M} \quad v(x_i, x_j) \in [0, 1]$.

Отметим, что Ф-нечеткие матрицы помечаются специальной тильдой $\approx$ вместо тильды $\sim$, используемой для нечетких матриц.

Все, что делалось для нечетких матриц,можно перенести на случай Ф-нечетких матриц. Однако надо иметь в виду,что при нечеткости все оценки сравнимы между собой и образуют полный линейный порядок, потому что для любых нечетких оценок m и n

(7.6) $\qquad$ или $m > n$, или $m = n$, или $m < n$.

На любом множестве доверительных интервалов можно установить частичный порядок, потому что не все интервалы сравнимы между собой. Интервалы $[m_1,m_2]$ и $[n_1,n_2]$ сравнимы, т. е. $[m_1,m_2] \lesseqgtr [n_1,n_2]$, если

(7.7) или $(m_1 < n_1,\ m_2 < n_2)$, или $(m_1 < n_1,\ m_2 = n_2)$, или $(m_1 = n_1,\ m_2 < n_2)$.

Поэтому

(7.8) $\qquad$ $[0.3, 0.7]$ несравним с $[0.2, 0.8]$.

Когда два доверительных интервала не сравнимы по правилам (7.7), можно ввести какой-либо другой критерий, основываясь на среднем из концов интервала. Выбор критерия зависит от поставленной задачи. Если Ф-нечеткая матрица такова, что

(7.9) $\qquad$ $\underset{\approx}{M} \subset E \times E$,

т. е. определяется через отношение исходного множества E на себя, то всегда

(7.10) $\qquad$ $\forall x_i \in E \quad v(x_i, x_i) = 1$.

Формула (4.9) композиции maxmin превращается в

(7.11) $\qquad$ $v(a_i, c_k) = \underset{j}{(\vee)} \left(v(a_i, b_j)\ (\wedge)\ v(b_j, c_k) \right)$,

где знаки $\wedge$ и $\vee$ в скобках указывают на то, что применяются операции (7.2) и (7.3). Композиция maxmin, определенная в (7.11), обладает интересным свойством, необходимым для доверительных интервалов: операции $(\wedge)$ и $(\vee)$ являются монотонными, т. е.

(7.12) $\qquad$ $[m_1, m_2]\ (\wedge)\ [n_1, n_2] \begin{cases} \leq [m_1, m_2], \\ \leq [n_1, n_2], \end{cases}$

(7.13) $\qquad$ $[m_1, m_2]\ (\vee)\ [n_1, n_2] \begin{cases} \geq [m_1, m_2], \\ \geq [n_1, n_2]. \end{cases}$

Кроме того, для любой Ф-нечеткой матрицы инциденций, главная диагональ которой образована единицами, имеем :

(7.14) $\qquad$ $\underset{\approx}{M} \underset{\Phi}{\subset} \underset{\approx}{M}^2, \quad \underset{\approx}{M}^2 = \underset{\approx}{M} \circ \underset{\approx}{M}$;

это означает, что доверительные интервалы $\underset{\approx}{M}^2$ ближе к единице, чем интервалы, соответствующие матрице $\underset{\approx}{M}$, или совпадают с ней. Речь идет о включении интервалов на основании свойства монотонности. Это же выполняется и для прямоугольных матриц,определенных в § 6:

(7.15) $\qquad$ $\underset{\approx}{M} \underset{\Phi}{\subset} \underset{\approx}{M}'$.

Поясним изложенное несколькими примерами. Пусть

(7.16) $\qquad$ $E = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

и матрица инциденций имеет вид

(7.17) $\underset{\sim}{M}$ =

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	[.3, .5]	.7	[.2, .3]
a_2	0	1	[.4, .7]	.5
a_3	[.8, 1]	[.7, 1]	1	[.4, .7]
a_4	.2	[0, .2]	[.1, .4]	1

По формуле (7.11) вычислим $\underset{\sim}{M}^2$. Так, при использовании первой строки и первого столбца матрицы $\underset{\sim}{M}$ получим:

$$\begin{aligned} &([1, 1]\,(\wedge)\,[1, 1])\,(\vee)\,([0.3, 0.5]\,(\wedge)\,[0, 0])\,(\vee) \\ (7.18)\quad &(\vee)\,([0.7, 0.7]\,(\wedge)\,[0.8, 1])\,(\vee)\,([0.2, 0.3]\,(\wedge)\,[0.2, 0.2]) = \\ &= [1, 1]\,(\vee)\,[0, 0]\,(\vee)\,[0.7, 0.7]\,(\vee)\,[0.2, 0.2] = [1, 1]; \end{aligned}$$

при использовании первой строки и второго столбца :

$$\begin{aligned} &([1, 1]\,(\wedge)\,[0.3, 0.5])\,(\vee)\,([0.3, 0.5]\,(\wedge)\,[1, 1])\,(\vee) \\ (7.19)\quad &(\vee)\,([0.7, 0.7]\,(\wedge)\,[0.7, 1])\,(\vee)\,([0.2, 0.3]\,(\wedge)\,[0, 0.2]) = \\ &= [0.3, 0.5]\,(\vee)\,[0.3, 0.5]\,(\vee)\,[0.7, 0.7]\,(\vee)\,[0, 0.2] = [0.7, 0.7]; \end{aligned}$$

при использовании первой строки и третьего столбца :

$$\begin{aligned} &([1, 1]\,(\wedge)\,[0.7, 0.7])\,(\vee)\,([0.3, 0.5]\,(\wedge)\,[0.4, 0.7])\,(\vee) \\ (7.20)\quad &(\vee)\,([0.7, 0.7]\,(\wedge)\,[1, 1])\,(\vee)\,([0.2, 0.3]\,(\wedge)\,[0.1, 0.4]) = \\ &= [0.7, 0.7]\,(\vee)\,[0.3, 0.5]\,(\vee)\,[0.7, 0.7]\,(\vee)\,[0.1, 0.3] = [0.7, 0.7] = 0.7 \end{aligned}$$

и т.д. В итоге имеем

(7.21) $\underset{\sim}{M}^2$ =

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	.7	.7	[.4, .7]
a_2	[.4, .7]	1	[.4, .7]	[.5, .7]
a_3	[.8, 1]	[.7, 1]	1	[.5, .7]
a_4	[.2, .4	[.2, .4]	[.2, .4]	1

Сравнивая $\underset{\sim}{M}$ и $\underset{\sim}{M}^2$, убеждаемся, что

$$(7.22)\qquad \underset{\sim}{M} \underset{\Phi}{\subset} \underset{\sim}{M}^2 .$$

Сейчас можно рассчитать расстояние между каждым элементом из M и соответствующим ему элементом из M^2. Это расстояние вычислим как среднее отклонений между левыми и правыми концами интервалов. Так, для элемента (a_1, a_2)

(7.23) $d = ((0.7 - 0.3) + (0.7 - 0.5)) \,/\, 2 = 0.3$.

В итоге получим своеобразную матрицу расстояний

(7.24) $d_{\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{M}^2}$ =

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	.3	0	.3
a_2	.55	0	0	.1
a_3	0	0	0	.05
a_4	.1	.2	.05	0

Из этой матрицы видно, что воздействием a_1 на a_2 нельзя пренебречь.

Рассмотрим далее пример с прямоугольной матрицей. Пусть A и B определены по (6.12), (6.13). Рассмотрим Ф-нечеткую матрицу

(7.25) $\underset{\sim}{M}$ =

	b_1	b_2	b_3
a_1	[.2, .5]	0	[.8, 1]
a_2	[.4, .5]	.7	1
a_3	0	[.3, .9]	[0, .2
a_4	.5	[.4, .6]	.8

при

(7.26) $\underset{\sim}{A}$ =

	a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	1	[0, .3]	[.8, 1]	1
a_2	[.4, .5]	1	.7	.7
a_3	[.2, .5]	1	1	[.8, 1]
a_4	[.3, .4	.5	1	1

(7.27) $\underset{\sim}{B}$ =

	b_1	b_2	b_3
b_1	1	[.2, .3]	.8
b_2	0	1	[.4, .7]
b_3	[.3, .8]	.6	1

Вычислим

(7.28) $\underset{\sim}{M}^* = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}$.

Получим

(7.29) $\underset{\sim}{M}^*$ =

	b_1	b_2	b_3
a_1	[.5, .8]	[.6, .9]	[.8, 1]
a_2	[.5, .8]	.7	1
a_3	[.5, .8]	[.7, .9]	1
a_4	[.5, .8]	[.6, .9]	[.8, 1]

Для сравнения (7.25) и (7.29) найдем матрицу расстояний

(7.30) $d_{\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{M}^*}$ =

	b_1	b_2	b_3
a_1	.3	.75	0
a_2	.2	0	0
a_3	.65	.2	.9
a_4	.15	.25	.1

Существует несколько интересных скрытых воздействий, таких как a_3 на b_3 при d=0.90, a_1 на b_2 при d=0.75, a_3 на b_1 при d=0.65. Остальными воздействиями при ненулевых расстояниях можно пренебречь.

8. Использование доверительных троек

Доверительная тройка определяется как разновидность интервальной оценки вида

(8.1) (m_1, m_2, m_3) , $m_1, m_2, m_3 \in [0, 1]$, $m_1 < m_2 < m_3$,

где m_1 - наименьшее значение; m_2 - максимально предполагаемое значение; m_3 - наибольшее значение.

Введение троек дает возможность большей свободы эксперту (или экспертам), который тремя значениями может точнее проверить свои предположения. Для троек определяются операции $(\wedge)$ и $(\vee)$:

(8.2) $(m_1, m_2, m_3)\ (\wedge)\ (n_1, n_2, n_3) = (m_1 \wedge n_1, m_2 \wedge n_2, m_3 \wedge n_3)$,

(8.3) $(m_1, m_2, m_3)\ (\vee)\ (n_1, n_2, n_3) = (m_1 \vee n_1, m_2 \vee n_2, m_3 \vee n_3)$.

Ниже приведен пример матрицы инциденций,оцениваемой доверительными тройками :

(8.4)

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	(.3,.5,.6)	(.1,.2,.3)	(.8,.9,1)	0
a_2	(.2,.2,.7)	(.7,.8,1)	0	1
a_3	.3	1	(.5,.5,.7)	.6
a_4	1	(0,.1,.1)	(.4,.5,.8)	(.9,.9,1)
a_5	(0,.2,.5)	0	(0,0,.2)	(.4,.6,.7)

с учетом того, что

(8.5) $(m, m, m) = m$.

Расстояние между двумя доверительными тройками

(8.6) (m_1, m_2, m_3) и (n_1, n_2, n_3)

определяется по формуле

(8.7) $d(m, n) = ((m_1 - n_1) + 2(m_2 - n_2) + (m_3 - n_3)) / 4$,

где предполагается,что $m_1 \geq n_1$, $m_2 \geq n_2$, $m_3 \geq n_3$. В противном случае в (8.7) необходимо брать абсолютные значения разностей. В формуле (8.7) вес 2 придается максимальному предполагаемому значению*. Для упражнения можно использовать примеры от (7.25) до (7.30), помещая в довери-

---

* Такое взвешивание оправдано, когда проводится аналогия с теорией треугольных нечетких чисел. Формула (8.7) дает в абсолютных значениях расстояние между двумя нечеткими треугольными числами.

тельные интервалы какие-либо максимально предполагаемые значения. Так же, как и для доверительных интервалов, априори можно сказать, что доверительные тройки образуют не полный, а частичный порядок. Когда тройки несравнимы, берется какой-либо другой критерий, например сравниваются их максимально предполагаемые значения.

9. Использование случайных нечетких матриц

При обработке мнений экспертов об инциденциях элементов одного множества на элементы другого множества можно прийти к случайной нечеткой матрице. Пусть имеется 10 экспертов, которым требуется оценить по одиннадцатиуровневой шкале (значениями 0,0.1,0.2,..., 0.9,1) инциденции элементов множества A

(9.1) $A = \{a_1, a_2, a_3\}$

на элементы множества B

(9.2) $B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

Каждый эксперт дает свою матрицу инциденций :

$$\underset{\sim}{M}^{(1)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .3 & .5 & .9 & 0 \\ \hline a_2 & .6 & .3 & 1 & .2 \\ \hline a_3 & 1 & 0 & .5 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \underset{\sim}{M}^{(2)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .5 & .7 & 1 & .1 \\ \hline a_2 & .5 & .4 & 1 & 0 \\ \hline a_3 & 1 & 0 & .5 & .3 \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}^{(3)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .2 & .3 & .8 & .2 \\ \hline a_2 & .1 & .5 & 1 & .2 \\ \hline a_3 & .9 & 0 & .7 & .3 \\ \hline \end{array} \qquad \underset{\sim}{M}^{(4)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .2 & 0 & 1 & 0 \\ \hline a_2 & 0 & .3 & 1 & .2 \\ \hline a_3 & .7 & .2 & .8 & .2 \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}^{(5)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & 1 & .8 & 1 & .1 \\ \hline a_2 & .4 & .1 & 1 & .1 \\ \hline a_3 & 1 & .3 & .9 & 0 \\ \hline \end{array} \qquad \underset{\sim}{M}^{(6)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .5 & .8 & .9 & 0 \\ \hline a_2 & .8 & .2 & 1 & 0 \\ \hline a_3 & 1 & 0 & .3 & 0 \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}^{(7)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .6 & .4 & 1 & 0 \\ \hline a_2 & .5 & .3 & 1 & .1 \\ \hline a_3 & 1 & 0 & .2 & .2 \\ \hline \end{array} \qquad \underset{\sim}{M}^{(8)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .8 & .2 & 1 & .2 \\ \hline a_2 & .6 & .4 & 1 & .2 \\ \hline a_3 & 1 & 0 & .4 & .1 \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}^{(9)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & .9 & .5 & .8 & .3 \\ \hline a_2 & .2 & .7 & 1 & 0 \\ \hline a_3 & .4 & .5 & .9 & .2 \\ \hline \end{array} \qquad \underset{\sim}{M}^{(10)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & 0 & .5 & .7 & 0 \\ \hline a_2 & 0 & .8 & 1 & .3 \\ \hline a_3 & .8 & .8 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Исходя из этой информации, устанавливается статистика встречаемости каждого уровня α для каждой пары (a_i,b_j), где i=1,2,3; j=1,2,3,4. Для нашего примера эти данные приведены в табл. 9.1. Эта статистика в расчете на количество экспертов задает частоту встречаемости каждого уровня для каждой пары, и эту частоту можно считать элементарной вероятностью свершения случайного события α, $\alpha \in \{0, 0.1, 0.2, \ldots, 0.9, 1\}$. Далее по элементарным вероятностям строится так называемая накопленная вероятность, т. е. для каждой пары (a_i,b_j), где i=1,2,3; j=1,2,3,4, последовательно суммируются значения вероятностей $p(\alpha{=}1)$, $p(\alpha{=}0.9)$, ..., $p(\alpha{=}0.1)$, $p(\alpha{=}0)$. Получается табл. 9.2. Для каждого уровня α из этой таблицы можно выписать случайную нечеткую матрицу инциденций элементов множества A на элементы множества B. Все операции, которые осуществлялись ранее с нечеткими отношениями, могут осуществляться со случайными нечеткими отношениями для каждого уровня α, $\alpha \in \{0, 0.1, 0.2, \ldots, 0.9, 1\}$. Понятно, что количество экспертов и уровней выбрано нами только для простоты вычислений. Всегда можно взять такое количество экспертов и уровней, которое будет сочтено целесообразным.

Таблица 9.1

		b_1	b_2	b_3	b_4
	0	1	1		5
	.1				2
	.2	2	1		2
	.3	1	1		1
	.4		1		
a_1	.5	2	3		
	.6	1			
	.7		1	1	
	.8	1	2	2	
	.9	1		2	
	1	1		5	
	0	2			3
	.1	1	1		2
	.2	1	1		4
	.3		3		1
	.4	1	2		
a_2	.5	2	1		
	.6	2			
	.7		1		
	.8	1	1		
	.9				
	1			10	
	0		6		4
	.1				1
	.2		1	1	3
	.3		1	1	2
	.4	1		1	
a_3	.5		1	2	
	.6				
	.7	1		1	
	.8	1	1	1	
	.9	1		2	
	1	6		1	

Таблица 9.2

		b_1	b_2	b_3	b_4
	0	1	1	1	1
	.1	.9	.9	1	.5
	.2	.9	.9	1	.3
	.3	.7	.8	1	.1
	.4	.6	.7	1	0
a_1	.5	.6	.6	1	0
	.6	.4	.3	1	0
	.7	.3	.3	1	0
	.8	.3	.2	.9	0
	.9	.2	0	.7	0
	1	.1	0	.5	0
	0	1	1	1	1
	.1	.8	1	1	.7
	.2	.7	.9	1	.5
	.3	.6	.8	1	.1
	.4	.6	.5	1	0
a_2	.5	.5	.3	1	0
	.6	.3	.2	1	0
	.7	.1	.2	1	0
	.8	.1	.1	1	0
	.9	0	0	1	0
	1	0	0	1	0
	0	1	1	1	1
	.1	1	.4	1	.6
	.2	1	.4	1	.5
	.3	1	.3	.9	.2
	.4	1	.2	.8	0
a_3	.5	.9	.2	.7	0
	.6	.9	.1	.5	0
	.7	.9	.1	.5	0
	.8	.8	.1	.4	0
	.9	.7	0	.3	0
	1	.6	0	.1	0

Композиция maxmin, введеная ранее, используется здесь таким же образом, но для каждого уровня отдельно, начиная, например, с уровня $\alpha=1$ и заканчивая уровнем $\alpha=0$. На практике полезно сохранить одиннадцатиуровневую систему, поскольку это количество уровней оказывается достаточным для изучения скрытых воздействий.

Приведем теперь пример анализа случайных нечетких квадратных матриц, оставляя более общий случай с прямоугольными матрицами для дальнейшего рассмотрения (см. § 11).

Т а б л и ц а 9.3

$\underset{\sim}{R} =$

		a_1	a_2	a_3
a_1	0	1	1	1
	.1	1	0	1
	.2	1	0	1
	.3	1	0	1
	.4	1	0	.8
	.5	1	0	.7
	.6	1	0	0
	.7	1	0	0
	.8	1	0	0
	.9	1	0	0
	1	1	0	0
a_2	0	1	1	1
	.1	1	1	.9
	.2	1	1	.9
	.3	1	1	.9
	.4	.6	1	.9
	.5	.5	1	.9
	.6	.4	1	.5
	.7	.1	1	.4
	.8	0	1	.3
	.9	0	1	0
	1	0	1	0
a_3	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	.8	1
	.4	.5	.5	1
	.5	.2	.2	1
	.6	0	0	1
	.7	0	0	1
	.8	0	0	1
	.9	0	0	1
	1	0	0	1

Т а б л и ц а 9.4

$\underset{\sim}{R}^2 =$

		a_1	a_2	a_3
a_1	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	.8	1
	.4	1	.5	.8
	.5	1	.2	.7
	.6	1	0	0
	.7	1	0	0
	.8	1	0	0
	.9	1	0	0
	1	1	0	0
a_2	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	1
	.4	.6	1	.9
	.5	.5	1	.9
	.6	.4	1	.5
	.7	.1	1	.4
	.8	0	1	.3
	.9	0	1	0
	1	0	1	0
a_3	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	.8	1
	.4	.5	.5	1
	.5	.2	.2	1
	.6	0	0	1
	.7	0	0	1
	.8	0	0	1
	.9	0	0	1
	1	0	0	1

Пусть задано множество

(9.3) $\quad A = \{a_1, a_2, a_3\}$

и 10 экспертов оценили инциденции элементов A на A в виде таблицы $\underset{\sim}{R}$ (табл. 9.3) накопленных вероятностей, из которой для каждого уровня выписываются случайные нечеткие матрицы инциденций (знак $\sim$ обозначает случайность нечетких отношений). По этим матрицам уровень за уровнем вычисляются матрицы, составляющие $\underset{\sim}{R}^2$ (табл. 9.4) :

уровень 1:
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0\\\hline 0 & 1 & 0\\\hline 0 & 0 & 1\\\hline\end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0\\\hline 0 & 1 & 0\\\hline 0 & 0 & 1\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0\\\hline 0 & 1 & 0\\\hline 0 & 0 & 1\\\hline\end{array}$$

уровень 0.9:
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0\\\hline 0 & 1 & 0\\\hline 0 & 0 & 1\\\hline\end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0\\\hline 0 & 1 & 0\\\hline 0 & 0 & 1\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0\\\hline 0 & 1 & 0\\\hline 0 & 0 & 1\\\hline\end{array}$$

уровень 0.8:
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0\\\hline 0 & 1 & .3\\\hline 0 & 0 & 1\\\hline\end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0\\\hline 0 & 1 & .3\\\hline 0 & 0 & 1\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0\\\hline 0 & 1 & .3\\\hline 0 & 0 & 1\\\hline\end{array}$$

уровень 0.7:
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0\\\hline .1 & 1 & .4\\\hline 0 & 0 & 1\\\hline\end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0\\\hline .1 & 1 & .4\\\hline 0 & 0 & 1\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0\\\hline .1 & 1 & .4\\\hline 0 & 0 & 1\\\hline\end{array}$$

уровень 0.6:
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0\\\hline .4 & 1 & .5\\\hline 0 & 0 & 1\\\hline\end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0\\\hline .4 & 1 & .5\\\hline 0 & 0 & 1\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 0\\\hline .4 & 1 & .5\\\hline 0 & 0 & 1\\\hline\end{array}$$

уровень 0.5:
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & .7\\\hline .5 & 1 & .9\\\hline .2 & .2 & 1\\\hline\end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & .7\\\hline .5 & 1 & .9\\\hline .2 & .2 & 1\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .2 & .7\\\hline .5 & 1 & .9\\\hline .2 & .2 & 1\\\hline\end{array}$$

уровень 0.4:
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & .8\\\hline .6 & 1 & .9\\\hline .5 & .5 & 1\\\hline\end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & .8\\\hline .6 & 1 & .9\\\hline .5 & .5 & 1\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .5 & .8\\\hline .6 & 1 & .9\\\hline .5 & .5 & 1\\\hline\end{array}$$

уровень 0.3:
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 1\\\hline 1 & 1 & .9\\\hline 1 & .8 & 1\\\hline\end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 1\\\hline 1 & 1 & .9\\\hline 1 & .8 & 1\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .8 & 1\\\hline 1 & 1 & 1\\\hline 1 & .8 & 1\\\hline\end{array}$$

уровень 0.2:
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 1\\\hline 1 & 1 & .9\\\hline 1 & 1 & 1\\\hline\end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 1\\\hline 1 & 1 & .9\\\hline 1 & 1 & 1\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1\\\hline 1 & 1 & 1\\\hline 1 & 1 & 1\\\hline\end{array}$$

уровень 0.1:
$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 1\\\hline 1 & 1 & .9\\\hline 1 & 1 & 1\\\hline\end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 0 & 1\\\hline 1 & 1 & .9\\\hline 1 & 1 & 1\\\hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 1\\\hline 1 & 1 & 1\\\hline 1 & 1 & 1\\\hline\end{array}$$

Для уровня 0 все элементы матрицы равны 1.

Для накопленных вероятностей (по схеме, обратной накоплению) можно однозначно восстановить элементарные вероятности как для $\underset{\sim}{R}$, так и для $\underset{\sim}{R}^2$ (табл. 9.5, 9.6).

Т а б л и ц а 9.5

		a_1	a_2	a_3
	0	0	1	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	0	.0	.2
	.4	0	0	.1
a_1	.5	0	0	.7
	.6	0	0	0
	.7	0	0	0
	.8	0	0	0
	.9	0	0	0
	1	1	0	0
	0	0	0	.1
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	.4	0	0
	.4	.1	0	0
a_2	.5	.1	0	.4
	.6	.3	0	.1
	.7	.1	0	.1
	.8	0	0	.3
	.9	0	0	0
	1	0	1	0
	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	.2	0
	.3	.5	.3	0
	.4	.3	.3	0
a_3	.5	.2	.2	0
	.6	0	0	0
	.7	0	0	0
	.8	0	0	0
	.9	0	0	0
	1	0	0	1

Т а б л и ц а 9.6

		a_1	a_2	a_3
	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	.2	0
	.3	0	.3	.2
	.4	0	.3	.1
a_1	.5	0	.2	.7
	.6	0	0	0
	.7	0	0	0
	.8	0	0	0
	.9	0	0	0
	1	1	0	0
	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	.4	0	.1
	.4	.1	0	0
a_2	.5	.1	0	.4
	.6	.3	0	.1
	.7	.1	0	.1
	.8	0	0	.3
	.9	0	0	0
	1	0	1	0
	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	.2	0
	.3	.5	.3	0
	.4	.3	.3	0
a_3	.5	.2	.2	0
	.6	0	0	0
	.7	0	0	0
	.8	0	0	0
	.9	0	0	0
	1	0	0	1

По элементарным вероятностям соответственно из табл. 9.5 и 9.6 можно вычислить математическое ожидание оценки инциденции каждого элемента $a_i \in A$ на каждый элемент $a_j \in A$. Для этого при фиксированных i и j находится сумма всех попарных произведений значений уровня и его вероятности. Так, в нашем примере на основе табл. 9.5 для пары (a_1,a_3) математическое ожидание будет $\varepsilon(a_1,a_3)=0.3*0.2+0.4*0.1+0.5*0.7=0.45$.

В результате получим следующие матрицы математических ожиданий:

$$\varepsilon(\underset{\sim}{R}) = \begin{array}{c|ccc|} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & .45 \\ a_2 & .46 & 1 & .57 \\ a_3 & .37 & .35 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \varepsilon(\underset{\sim}{R}^2) = \begin{array}{c|ccc|} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & .35 & .45 \\ a_2 & .46 & 1 & .60 \\ a_3 & .37 & .35 & 1 \\ \hline \end{array}$$

Сравнение этих матриц дает возможность выявить скрытые (косвенные) воздействия второго порядка. Так, подобное воздействие проявляется, хотя и не очень интенсивно, для пары (a_1, a_2).

Маловероятно, что при использовании изложенного метода найдутся скрытые воздействия с отклонениями, близкими к единице. Это может произойти только при существенных отклонениях в мнениях экспертов или в случае примеров с большим количеством влияющих друг на друга факторов.

10. Использование экспертонов

Предположим, что каждый эксперт, вместо того чтобы, как это делалось в предыдущем параграфе, выразить свое мнение с помощью одного числа из интервала [0,1], производит оценку в виде доверительного интервала из [0,1]. Это дает экспертам большую свободу выражения субъективных мнений.

Пусть снова требуется, чтобы 10 экспертов оценили по одиннадцатиуровневой шкале инциденции элементов (9.1) множества A на элементы (9.2) множества B через доверительные интервалы. Например, это могут быть следующие оценки:

$$M^{(1)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & [.3, .7] & [.4, .5] & [.6, .7] & .3 \\ a_2 & [.2, .3] & [.8, 1] & .8 & 0 \\ a_3 & 1 & [0, .3] & [0, .5] & [.6, .8] \\ \hline \end{array}$$

$$M^{(2)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & [.3, .6] & 0 & .3 & [.1, .2] \\ a_2 & [.2, .5] & [.1, .2] & .9 & 0 \\ a_3 & [.3, .4] & 0 & [0, .5] & [.9, 1] \\ \hline \end{array}$$

$$M^{(3)} = \begin{array}{c|c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ \hline a_1 & [.4, 1] & 1 & [0, .2] & .2 \\ a_2 & [.5, .6] & [.9, 1] & 1 & [.2, .4] \\ a_3 & 1 & [.4, .5] & [0, .2] & [.7, .8] \\ \hline \end{array}$$

$M^{(4)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[.5, .7]	.3	[.1, .3]	[0, .2]
a_2	1	[.1, .2]	[.8, 1]	0
a_3	[.1, .4]	0	.3	1

$M^{(5)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[0, .1]	[.5, .6]	0	[.1, .2]
a_2	[.4, 1]	1	[.7, .9]	0
a_3	1	0	[0, .2]	1

$M^{(6)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	.5	0	0	[.2, .3]
a_2	1	1	1	[0, .2]
a_3	0	[.1, .2]	0	[.6, 1]

$M^{(7)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[.2, .3]	.6	.4	[.2, .4]
a_2	[.6, 1]	[.8, 1]	[.8, 1]	[.1, .3]
a_3	[.7, .9]	0	[.1, .3]	[.9, 1]

$M^{(8)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[.4, .5]	0	[0, .3]	.5
a_2	[.7, 1]	[.9, 1]	.8	0
a_3	0	0	[.1, .3]	[.5, .8]

$M^{(9)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	[.2, .3]	[.3, .5]	[0, .1]	0
a_2	[.3, 1]	[.8, 1]	[.8, .9]	.1
a_3	1	.1	[.2, .3]	[.7, .8]

$M^{(10)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	.8	[0, .2]	[.1, .2]	[.6, .7]
a_2	1	1	[.8, .9]	0
a_3	[.2, .3]	0	.5	1

На основании этой информации устанавливается статистика встречаемости каждого уровня α среди левых и правых концов доверительных интервалов (табл. 10.1).

Т а б л и ц а 10.1

		b_1		b_2		b_3		b_4	
a_1	0	1		4	3	5	2	2	1
	.1		1			2	1	2	
	.2	2			1		2	3	4
	.3	2	2	2	1	1	3	1	2
	.4	2		1		1	1		1
	.5	2	2	1	2			1	1
	.6		1	1	2	1		1	
	.7		2				1		1
	.8	1	1						
	.9								
	1		1	1	1				
a_2	0							7	6
	.1			2				2	1
	.2	2			2			1	1
	.3	1	1						1
	.4	1							1
	.5	1	1						
	.6	1	1						
	.7	1				1			
	.8			3		6	2		
	.9			2		1	4		
	1	3	7	3	8	2	4		
a_3	0	2	2	7	6	5	1		
	.1	1		2	1	2			
	.2	1			1	1	2		
	.3	1	1		1	1	4		
	.4		2	1					
	.5				1	1	3	1	
	.6							2	
	.7	1						2	
	.8								4
	.9		1					2	
	1	4	4					3	6

Т а б л и ц а 10.2

$\underset{\sim}{R} =$

		b_1		b_2		b_3		b_4	
a_1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	.9	1	.6	.7	.5	.8	.8	.9
	.2	.9	.9	.6	.7	.3	.7	.6	.9
	.3	.7	.9	.6	.6	.3	.5	.3	.5
	.4	.5	.7	.4	.5	.2	.2	.2	.3
	.5	.3	.7	.3	.5	.1	.1	.2	.2
	.6	.1	.5	.2	.3	.1	.1	.1	.1
	.7	.1	.4	.1	.1	0	.1	0	.1
	.8	.1	.2	.1	.1	0	0	0	0
	.9	0	.1	.1	.1	0	0	0	0
	1	0	.1	.1	.1	0	0	0	0
a_2	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	.3	.4
	.2	1	1	.8	1	1	1	.1	.3
	.3	.8	1	.8	.8	1	1	0	.2
	.4	.7	.9	.8	.8	1	1	0	.1
	.5	.6	.9	.8	.8	1	1	0	0
	.6	.5	.8	.8	.8	1	1	0	0
	.7	.4	.7	.8	.8	1	1	0	0
	.8	.3	.7	.8	.8	.9	1	0	0
	.9	.3	.7	.5	.8	.3	.8	0	0
	1	.3	.7	.3	.8	.2	.4	0	0
a_3	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	.8	.8	.3	.4	.5	.9	1	1
	.2	.7	.8	.1	.3	.3	.9	1	1
	.3	.6	.8	.1	.2	.2	.7	1	1
	.4	.5	.7	.1	.1	.1	.3	1	1
	.5	.5	.5	0	.1	.1	.3	1	1
	.6	.5	.5	0	0	0	0	.9	1
	.7	.5	.5	0	0	0	0	.7	1
	.8	.4	.5	0	0	0	0	.5	1
	.9	.4	.5	0	0	0	0	.5	.6
	1	.4	.4	0	0	0	0	.3	.6

По данным из табл. 10.1 очевидным образом находятся соответствующие элементарные вероятности, по которым так же, как и ранее, находятся накопленные вероятности для каждой пары (a_i, b_j), где $i=1,2,3$; $j=1,2,3,4$, и для обоих концов доверительных интервалов (табл. 10.2)

Конструкции, подобные табл. 10.2, как обобщение случайных нечетких матриц через доверительные интервалы названы нами экспертонами. Из табл. 10.2 для каждого уровня α выписываются матрицы инциденций. Все операции, введенные для обычных матриц инциденций, нечетких, Ф-нечетких, случайных нечетких инциденций могут также осуществляться и с матрицами инциденций по экспертонам. Понятно, что для последних расчеты становятся более длительными (увеличиваются в 22 раза при экспертонах по сравнению с нечеткими матрицами), однако при современном уровне компьютеризации это не может быть сдерживающим фактором. Снова количество экспертов и уровней выбрано нами только для простоты вычислений.

Вернемся к мини-примеру с множеством А из (9.3) и используем экспертоны. Предполагается, что сотрудничество 10 экспертов привело к оценкам инциденций, заданным в виде экспертона $\underset{\sim}{R}$ (табл. 10.3).

Т а б л и ц а 10.3

$\underset{\sim}{R} =$

		a_1	a_2	a_3
	0	1	1	1
	.1	1	1	.9 1
	.2	1	1	.2
	.3	1	1	0
	.4	1	1	0
a_1	.5	1	1	0
	.6	1	.9	0
	.7	1	.6 .8	0
	.8	1	.6 .8	0
	.9	1	.3	0
	1	1	.1	0
	0	1	1	1
	.1	1	1	.9 1
	.2	1	1	.9
	.3	.9 1	1	.9
	.4	.9 1	1	.7 .8
a_2	.5	.7 .8	1	.7 .8
	.6	.6 .7	1	.7
	.7	.6 .7	1	.6 .7
	.8	.6	1	.6
	.9	.6	1	.6
	1	.6	1	.3 .4
	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	.6 .7	1
	.3	1	.3 .4	1
	.4	.9 1	.3	1
a_3	.5	.9 1	0	1
	.6	.9	0	1
	.7	.9	0	1
	.8	.8	0	1
	.9	.7 .8	0	1
	1	.5 .6	0	1

По этой информации уровень за уровнем вычисляются матрицы, составляющие экспертон $\underset{\sim}{R}^2$ (табл. 10.4):

$$\alpha = 1: \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .1 & 0 \\ \hline .6 & 1 & .3\ .4 \\ \hline .5\ .6 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .1 & 0 \\ \hline .6 & 1 & .3\ .4 \\ \hline .5\ .6 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .1 & .1 \\ \hline .6 & 1 & .3\ .4 \\ \hline .5\ .6 & .1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha = 0.9: \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .3 & 0 \\ \hline .6 & 1 & .6 \\ \hline .7\ .8 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .3 & 0 \\ \hline .6 & 1 & .6 \\ \hline .7\ .8 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .3 & .3 \\ \hline .6 & 1 & .6 \\ \hline .7\ .8 & .3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha = 0.8: \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .6\ .8 & 0 \\ \hline .6 & 1 & .6 \\ \hline .8 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .6\ .8 & 0 \\ \hline .6 & 1 & .6 \\ \hline .8 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .6\ .8 & .6 \\ \hline .6 & 1 & .6 \\ \hline .8 & .6\ .8 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha = 0.7: \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .6\ .8 & 0 \\ \hline .6\ .7 & 1 & .6\ .7 \\ \hline .9 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .6\ .8 & 0 \\ \hline .6\ .7 & 1 & .6\ .6 \\ \hline .9 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .6\ .8 & .6\ .7 \\ \hline .6\ .7 & 1 & .6\ .7 \\ \hline .9 & .6\ .8 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha = 0.6: \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .9 & 0 \\ \hline .6\ .7 & 1 & .7 \\ \hline .9 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .9 & 0 \\ \hline .6\ .7 & 1 & .7 \\ \hline .9 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & .9 & .7 \\ \hline .7 & 1 & .7 \\ \hline .9 & .9 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha = 0.5: \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 \\ \hline .7\ .8 & 1 & .7\ .8 \\ \hline .9\ 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 \\ \hline .7\ .8 & 1 & .7\ .8 \\ \hline .9\ 1 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & .7\ .8 \\ \hline .7\ .8 & 1 & .7\ .8 \\ \hline .9\ 1 & .9\ 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha = 0.4: \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 \\ \hline .9\ 1 & 1 & .7\ .8 \\ \hline .9\ 1 & .3 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 \\ \hline .9\ 1 & 1 & .7\ .8 \\ \hline .9\ 1 & .3 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & .7\ .8 \\ \hline .9\ 1 & 1 & .7\ .8 \\ \hline .9\ 1 & .9\ 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha = 0.3: \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 \\ \hline .9\ 1 & 1 & .9 \\ \hline 1 & .3\ .4 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & 0 \\ \hline .9\ 1 & 1 & .9 \\ \hline 1 & .3\ .4 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & .9 \\ \hline .9\ 1 & 1 & .9 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha = 0.2: \quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & .2 \\ \hline 1 & 1 & .9 \\ \hline 1 & .6\ .7 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & .2 \\ \hline 1 & 1 & .9 \\ \hline 1 & .6\ .7 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & .9 \\ \hline 1 & 1 & .9 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\alpha=0.1:\quad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & .91 \\ \hline 1 & 1 & .91 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} \circ \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & .91 \\ \hline 1 & 1 & .91 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 1 & .91 \\ \hline 1 & 1 & .91 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline\end{array}$$

Для $\alpha=0$ все элементы матрицы равны 1.

Т а б л и ц а 10.4

$\underset{\sim}{R}^2 =$

		a_1	a_2	a_3
a_1	0	1	1	1
	.1	1	1	.9 1
	.2	1	1	.9
	.3	1	1	.9
	.4	1	1	.7 .8
	.5	1	1	.7 .8
	.6	1	.9	.7
	.7	1	.6 .8	.6 .7
	.8	1	.6 .8	.6
	.9	1	.3	.3
	1	1	.1	.1
a_2	0	1	1	1
	.1	1	1	.9 1
	.2	1	1	.9
	.3	.9 1	1	.9
	.4	.9 1	1	.7 .8
	.5	.7 .8	1	.7 .8
	.6	.7	1	.7
	.7	.6 .7	1	.6 .7
	.8	.6	1	.6
	.9	.6	1	.6
	1	.6	1	.3 .4
a_3	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	1
	.4	.9 1	.9 1	1
	.5	.9 1	.9 1	1
	.6	.9	.9	1
	.7	.9	.6 .8	1
	.8	.8	.6 .8	1
	.9	.7 .8	.3	1
	1	.5 .6	.1	1

Для накопленных вероятностей (по схеме, обратной накоплению) можно однозначно восстановить элементарные вероятности как для $\underset{\sim}{R}$, так и для $\underset{\sim}{R}^2$ (табл. 10.5, 10.6).

Т а б л и ц а 10.5

		a_1	a_2	a_3
	0			.1 0
	.1			.7 .8
	.2			.2
	.3			
	.4			
a_1	.5		.1	
	.6		.3 .1	
	.7			
	.8		.3 .5	
	.9		.2	
	1	1	.1	
	0			.1 0
	.1			0 .1
	.2	.1 0		
	.3			.2 .1
	.4	.2 .2		
a_2	.5	.1 .1		0 .1
	.6			.1 0
	.7	0 .1		0 .1
	.8			
	.9			.3 .2
	1	.6	1	.3 .4
	0			
	.1		.4 .3	
	.2		.3 .3	
	.3	.1 0	0 .1	
	.4		.3	
a_3	.5	0 .1		
	.6			
	.7	.1 .1		
	.8	.1 0		
	.9	.2 .2		
	1	.5 .6		1

Т а б л и ц а 10.6

		a_1	a_2	a_3
	0			.1 0
	.1			0 .1
	.2			
	.3			.2 .1
	.4			
a_1	.5		.1 .1	0 .1
	.6		.3 .1	.1 0
	.7			0 .1
	.8		.3 .5	.3
	.9		.2	.2
	1	1	.1	.1
	0			.1 0
	.1			0 .1
	.2	.1 0		
	.3			.2 .1
	.4	.2 .2		
a_2	.5	0 .1		0 .1
	.6	.1 0		.1 0
	.7	0 .1		0 .1
	.8			
	.9			.3 .2
	1	.6	1	.3 .4
	0			
	.1			
	.2			
	.3	.1 0	.1 0	
	.4			
a_3	.5	0 .1	0 .1	
	.6		.3 .1	
	.7	.1 .1	.	
	.8	.1 0	.3 .5	
	.9	.2 .2	.2	
	1	.5 .6	.1	1

По данным из табл. 10.5 и 10.6 вычислим соответственно матрицы математических ожиданий оценок инциденций по концам доверительных интервалов:

$$\varepsilon(\underset{\sim}{R}) = \begin{array}{c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & .75,\ .79 & .11,\ .11 \\ \hline a_2 & .75,\ .80 & 1 & .69,\ .74 \\ \hline a_3 & .86,\ .90 & .22,\ .24 & 1 \\ \hline \end{array} \qquad \varepsilon(\underset{\sim}{R}^2) = \begin{array}{c|c|c|c|} & a_1 & a_2 & a_3 \\ \hline a_1 & 1 & .75,\ .79 & .64,\ .68 \\ \hline a_2 & .76,\ .80 & 1 & .69,\ .74 \\ \hline a_3 & .86,\ .90 & .73,\ .79 & 1 \\ \hline \end{array} .$$

Возьмем теперь средние в доверительных интервалах:

$\varepsilon(\underset{\sim}{R})=$

	a_1	a_2	a_3
a_1	1	.770	.115
a_2	.775	1	.715
a_3	.880	.230	1

$\varepsilon(\underset{\sim}{R}^2)=$

	a_1	a_2	a_3
a_1	1	.770	.660
a_2	.780	1	.715
a_3	.880	.760	1

Сравнение этих матриц позволяет выявить скрытые воздействия второго порядка. Наиболее существенно они проявляются для пар (a_1,a_3) и (a_3,a_2).

Можно уточнить мнения экспертов, вводя дополнительно к доверительным интервалам еще одну оценку - максимально предполагаемое значение. Таким образом, получаются специфические интервальные оценки - доверительные тройки:

$$(a_1, a_2, a_3)\ ,\quad a_1, a_2, a_3 \in [0, 1]\ ,\ a_1 \leq a_2 \leq a_3\ ,$$

и, как отмечалось в § 8, операции с ними такие же, как для доверительных интервалов (например, с использованием формул (8.2) и (8.3)).

Читатели, знакомые с теорией нечетких чисел и, в частности, с теорией нечетких треугольных чисел не должны смешивать доверительную тройку с нечетким треугольным числом. Последнее представляет собой две линейные функции принадлежности от a_1 до a_2 и от a_2 до a_3. Для концов интервала функция принадлежности равна 0, а для максимально предполагаемого значения - 1. Операции ($\wedge$) и ($\vee$), осуществляемые с нечеткими числами, здесь уже проводятся над нечеткими числами, не являющимися в общем случае треугольными. Для доверительных троек они приводят к доверительным тройкам (без использования функций принадлежности). Однако и для доверительной тройки, так же как и для нечеткого треугольного числа, репрезентативное число определяется по формуле

$$\bar{a} = (a_1 + 2a_2 + a_3)\ /\ 4\ .$$

В формуле используется удвоение максимально предполагаемого значения по сравнению с концами интервала. Необходимость этого доказывается для нечетких треугольных чисел, и такой подход кажется наиболее удачным для доверительных троек.

Если, например, матрица инциденций одного эксперта имеет вид

	b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	(.3, .7, 1)	(.2, .3, .3)	(.5, .6, .8)	.8
a_2	1	(0, 0, .2)	(.4, .5, .7)	0
a_3	(.1, .2, .4)	.4	(.2, .2, .3)	(.6, .7, .8)

то экспертон с доверительными тройками может иметь вид, заданный табл. 10.7.

Таблица 10.7

		b_1	b_2	b_3	b_4
a_1	0	1	1	1	1
	.1	1	1	.8 .9 1	1
	.2	1	1	.8 .9 1	.4 .5 .7
	.3	.8 .9 1	1	.8 .8 .9	.2 .3 .3
	.4	.8 .8 1	1	.8	0 .1 .1
	.5	.8	1	.7 .7 .8	0
	.6	.6 .7 .7	1	.7 .7 .8	0
	.7	.4 .4 .5	1	.7 .7 .8	0
	.8	.4	1	.7	0
	.9	0 .1 .2	1	.5 .6 .7	0
	1	0	1	.2 .4 .6	0
a_2	0	1	1	1	1
	.1	0	.9	1	1
	.2	0	.9	1	1
	.3	0	.7 .8 .9	.9 .9 1	1
	.4	0	.7 .7 .8	.8 .9 1	.5 .6 .7
	.5	0	.6 .7 .7	.8 .9 1	.5 .6 .6
	.6	0	.5	.8 .9 1	.5 .5 .6
	.7	0	.4 .5 .5	.4 .8 .8	.5
	.8	0	.2	.3	.4 .4 .5
	.9	0	.1	.2 .3 .3	.4
	1	0	0	.1	.4
a_3	0	1	1	1	1
	.1	1	0	.9 1 1	1
	.2	.5 .7 .8	0	.9 1 1	1
	.3	.3 .5 .5	0	.9 .9 1	.9 1 1
	.4	.1 .2 .2	0	.9	.9 .9 1
	.5	0	0	.8 .9 .9	.9
	.6	0	0	.8	.8 .8 .9
	.7	0	0	.8	.7 .8 .9
	.8	0	0	.8	.6 .7 .7
	.9	0	0	.7 .8 .8	.6
	1	0	0	.6	.6

Операции над экспертонами с доверительными тройками осуществляются так же, как и с доверительными интервалами или с Ф-нечеткими матрицами.

Далее можно было бы рассмотреть еще одно обобщение интервальных оценок в виде доверительных четверок (a_1, a_2, a_3, a_4), где a_1, a_4 - концы доверительного интервала; $[a_2, a_3]$ - доверительный интервал для максимально предполагаемого значения при $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$.

Операции $(\wedge)$ и $(\vee)$ зададим по формулам :

$$(m_1, m_2, m_3, m_4)\ (\wedge)\ (n_1, n_2, n_3, n_4) = (m_1 \wedge n_1, m_2 \wedge n_2, m_3 \wedge n_3, m_4 \wedge n_4)\ ,$$

$$(m_1, m_2, m_3, m_4)\ (\vee)\ (n_1, n_2, n_3, n_4) = (m_1 \vee n_1, m_2 \vee n_2, m_3 \vee n_3, m_4 \vee n_4)\ .$$

При таком подходе не следует смешивать доверительные четверки с нечеткими трапециевидными числами.

Репрезентативное число для доверительной четверки вычисляется как

$$\hat{a} = (a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4) \ / \ 6 \ .$$

Дальнейший анализ с доверительными четверками осуществляется так же, как и с доверительными тройками.

11. Промежуточные причины скрытых воздействий

Для примера, приведенного в § 5, рассмотрим более подробно способы учета инциденций с переходом на случайные нечеткие матрицы и матрицы по экспертонам. Опишем схему влияния фактора 9 на фактор 12 через все другие факторы.

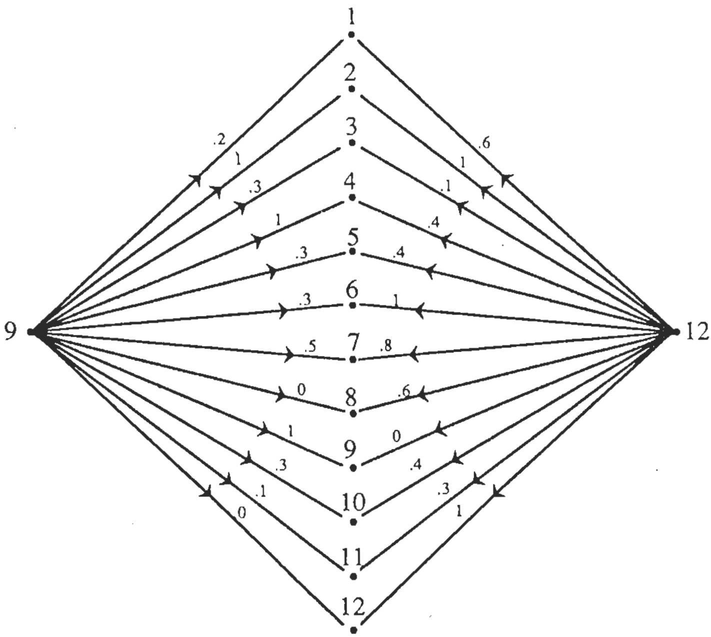


Рис. 11.1

Из рис. 11.1 видно, что максимум из минимумов двух следующих друг за другом инциденций достигается на пути $9 \longrightarrow 2 \longrightarrow 12$, и он равен $1 \wedge 1=1$. Другие пути дают значения, меньшие или равные 0,5. Так, для пути $9 \longrightarrow 7 \longrightarrow 12$ получаем $0{,}5 \wedge 0{,}8=0.5$. Итак, инциденция второго порядка для окружающей среды на оборону проявляется через население. В конечном счете окружающая среда оказывает существенное воздействие на оборону. Для того чтобы оборона была сильной, необходимо, чтобы население хотело защищать свою окружающую среду, свою родину, свои нравы и обычаи, исторические памятники и традиции. Для быстрого получения этого результата полезно расположить друг за другом 9-ю строку и 12-й столбец из табл. 5.1 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
.2	1	.3	1	.3	.3	.5	0	1	.3	.1	0

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
.6	1	.1	.4	.4	1	.8	.6	0	.4	.3	1

Очевидно, что композиция maxmin соответствует фактору 2. Повторим этот же процесс для факторов 8 и 2.

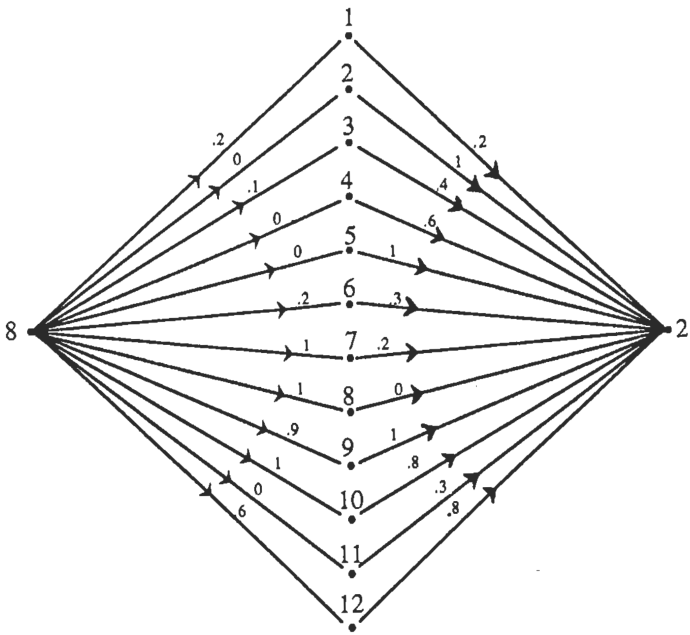


Рис. 11.2

Из рис.11.2 видно, что максимум из минимумов двух последовательных инциденций достигается на пути 8 ⟶ 9 ⟶ 2, и он равен $0.9 \wedge 1.0=1$. Другие пути дают значения, не превосходящие 0.8. Именно для пути 8 ⟶ 10 ⟶ 2 получаем $1 \wedge 0.8=0.8$. Таким образом, видно, что наиболее важной причиной второго порядка влияния энергетики на население является окружающая среда: речь идет об известном влиянии промышленного загрязнения, однако оно не было отмечено непосредственно. Как и выше, для получения этого результата полезно было бы расположить друг за другом 8-ю строку и 2-й столбец из табл. 5.1 :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
.2	0	.1	0	0	.2	1	1	.9	1	0	.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
.2	1	.4	.6	1	.3	.2	0	1	.8	.3	.8

Композиция maxmin в этом случае соответствует фактору 10. Однако нельзя исключать и фактор 10. Энергетика является абсолютно необходимой для транспорта, а транспорт имеет большую инциденцию на население. В качестве упражнений предлагаем читателю определить скрытые воздействия второго порядка для всевозможных остальных пар факторов, заданных в табл. 5.1.

Рассмотрим сейчас, как оперировать прямоугольными матрицами инциденций. Для этого вернемся к примеру из § 6. С помощью (6.18) было отмечено наличие скрытого воздействия a_2 на b_1. Воспроизведем эти инциденции, начиная из a_2, для того, чтобы перейти к b_1 , на основе композиции матриц $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}$, приведшей к $\underset{\sim}{M}^*$. Схематично это можно представить в виде графа, изображенного на рис. 11.3.

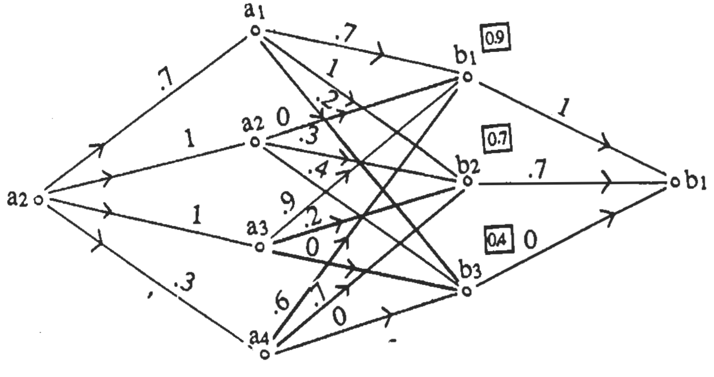


Рис. 11.3

Из рис.11.3 видно, что вершина b_1 из a_2 достижима различными путями, каждый из которых содержит ровно три дуги. Поэтому вначале вычисляется композиция maxmin, соответствующая путям с двумя дугами до вершин b_1, b_2, b_3 (как элемент $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}$), а потом композиция maxmin до конечной вершины b_1 (как элемент $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}$). Таким образом, на первом шаге получим :

на пути к b_1 $0.7 \wedge 0.7 = 0.7,\ 1 \wedge 0 = 0,\ 1 \wedge 0.9 = 0.9,\ 0.3 \wedge 0.6 = 0.3$ и максимум равен 0.9,

на пути к b_2 $0.7 \wedge 1 = 0.7,\ 1 \wedge 0.3 = 0.3,\ 1 \wedge 0.2 = 0.2,\ 0.3 \wedge 0.7 = 0.3$ и максимум равен 0,7,

на пути к b_3 $0.7 \wedge 0.2 = 0.2,\ 1 \wedge 0.4 = 0.4,\ 1 \wedge 0 = 0,\ 0.3 \wedge 0 = 0$ и максимум равен 0.4.

Далее, на втором шаге вычисляем $0.9 \wedge 1 = 0.9$, $0.7 \wedge 0.7 = 0.7$, $0.4 \wedge 0 = 0$ с максимумом, равным 0.9. По этому значению обратным ходом (как в динамическом программировании) восстанавливается путь $a_2 \to a_3 \to b_1 \to b_1$ на графе, изображенном на рис.11.3. Отметим, что используемый способ может быть распространен также на инциденции третьего порядка, четвертого порядка и т. д. По (6.18) было найдено и скрытое воздействие a_1 на b_3. Снова воспроизведем эти инциденции на основе матриц $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{M}$, $\underset{\sim}{B}$ в виде графа, приведенного на рис.11.4 .

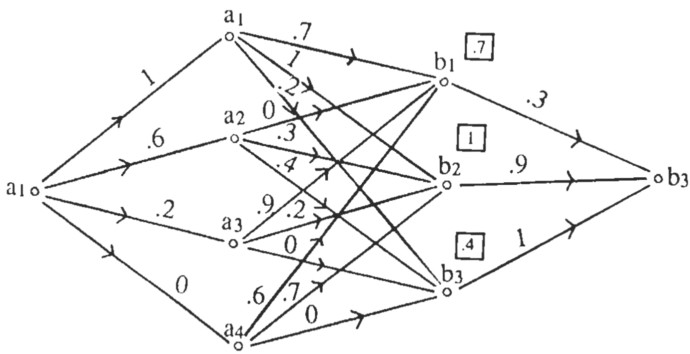


Рис. 11.4

Детальные вычисления, аналогичные только что проведенным, восстанавливают путь $a_1 \to a_1 \to b_2 \to b_3$, которому соответствует максимум $1 \wedge 1 \wedge 0.9 = 0.9$.

Таким образом, проявляется наиболее существенное косвенное воздействие a_1 на b_3 через b_2. Все изложенное здесь на графах может быть объяснено и на матрицах. Так, для примера с рис. 11.4 можно использовать следующие матричные операции:

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \end{array}\begin{array}{|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{a_1} & \multicolumn{1}{c}{a_2} & \multicolumn{1}{c}{a_3} & \multicolumn{1}{c}{a_4} \\ \hline 1 & .6 & .2 & 0 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array}\begin{array}{|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{b_1} & \multicolumn{1}{c}{b_2} & \multicolumn{1}{c}{b_3} \\ \hline .7 & 1 & .2 \\ \hline 0 & .3 & .4 \\ \hline .9 & .2 & 0 \\ \hline .6 & .7 & 0 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c} \\ a_1 \end{array}\begin{array}{|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{b_1} & \multicolumn{1}{c}{b_2} & \multicolumn{1}{c}{b_3} \\ \hline .7 & 1 & .4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \end{array}\begin{array}{|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{b_1} & \multicolumn{1}{c}{b_2} & \multicolumn{1}{c}{b_3} \\ \hline .7 & 1 & .4 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c} \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array}\begin{array}{|c|} \multicolumn{1}{c}{b_3} \\ \hline .3 \\ \hline .9 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array} = 0.9$$

Стрелки в этих схемах помогают восстановить путь, на котором проявляется наиболее существенное косвенное воздействие. Понятно, что в общем случае может быть несколько путей, соответствующих одному и тому же максимуму. Существуют эффективные комбинаторные методы для нахождения всех этих путей.

Предположим сейчас, что анализируемые матрицы являются Ф-нечеткими. Предполагаемый метод в своей основе остается тем же, но, поскольку доверительные интервалы образуют частичный, а не полный порядок, проблема несколько усложнятся. Матрица расстояний (типа (7.30)) укажет наличие скрытых воздействий. Восстановление факторов, через которые проявляется такое воздействие, проводится по схеме, обратной ходу вычислений. Действительно, если вернуться к рассмотрению (7.25) — (7.29) в поисках пути для скрытых воздействий a_3 на b_3, то получим :

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
\hline
a_3 & [.2, .5] & 1 & 1 & [.8, 1] \\
\hline
\end{array}
\circ
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\
\hline
a_1 & [.2, .5] & 0 & [.8, 1] \\
\hline
a_2 & [.4, .5] & .7 & 1 \\
\hline
a_3 & 0 & [.3, .9] & [0, .2] \\
\hline
a_4 & .5 & [.4, .6] & .8 \\
\hline
\end{array}
=
$$

$$
= \begin{array}{c|c|c|c|}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\
\hline
a_3 & .5 & [.7, .9] & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\
\hline
a_3 & .5 & [.7, .9] & 1 \\
\hline
\end{array}
\circ
\begin{array}{c|c|}
 & b_3 \\
\hline
b_1 & .8 \\
\hline
b_2 & [.4, .7] \\
\hline
b_3 & 1 \\
\hline
\end{array}
= 1
$$

Стрелки в этих схемах помогают восстановить путь $a_3 \rightarrow a_2 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3$. Кстати, на этот путь не влияет никакой доверительный интервал. Если же такое влияние имеется, то следует искать путь для левых и правых концов этих интервалов и делать необходимые выводы. Рассмотрим, например, скрытое воздействие a_1 на b_2, которое по (7.30) было оценено в 0.75. Для левых концов интервалов получим :

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
\hline
a_1 & 1 & 0 & .8 & 1 \\
\hline
\end{array}
\circ
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\
\hline
a_1 & .2 & 0 & .8 \\
\hline
a_2 & .4 & .7 & 1 \\
\hline
a_3 & 0 & .3 & 0 \\
\hline
a_4 & .5 & .4 & .8 \\
\hline
\end{array}
=
$$

$$
= a_1
\begin{array}{|c|c|c|}
b_1 & b_2 & b_3 \\
\hline
.5 & .4 & .8 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\
\hline
a_1 & .5 & .4 & .8 \\
\hline
\end{array}
\circ
\begin{array}{c|c|}
 & b_3 \\
\hline
b_1 & .2 \\
\hline
b_2 & 1 \\
\hline
b_3 & .6 \\
\hline
\end{array}
= 0.6
$$

По стрелкам в этих схемах восстанавливается путь $a_1 \to a_1 \to b_3 \to b_2$, соответствующий оценке 0.6. Для правых концов интервалов получим :

$$
\begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\
\hline
a_1 & 1 & .3 & 1 & 1 \\
\hline
\end{array}
\circ
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\
\hline
a_1 & .5 & 0 & 1 \\
\hline
a_2 & .5 & .7 & 1 \\
\hline
a_3 & 0 & .9 & .2 \\
\hline
a_4 & .5 & .6 & .8 \\
\hline
\end{array}
=
$$

$$
= a_1
\begin{array}{|c|c|c|}
b_1 & b_2 & b_3 \\
\hline
.5 & .9 & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c|c|c|}
 & b_1 & b_2 & b_3 \\
\hline
a_1 & .5 & .9 & 1 \\
\hline
\end{array}
\circ
\begin{array}{c|c|}
 & b_3 \\
\hline
b_1 & .3 \\
\hline
b_2 & 1 \\
\hline
b_3 & .6 \\
\hline
\end{array}
= 0.9
$$

По стрелкам в этих схемах восстанавливается путь $a_1 \to a_3 \to b_2 \to b_2$, соответствующий оценке 0.9. Не следует удивляться, что получены разные пути для левых и правых концов интервалов, поскольку в этом случае отношения причины и следствия нечетки. Основное промежуточное воздействие задается правыми концами.

Ситуация осложняется при наличии нескольких путей для левых и (или) правых концов интервалов; в этом случае целесообразно ограничиться путями для правых концов. Единственный путь также получается при осуществлении расчетов на основе средних в доверительных интервалах, образующих Ф-нечеткие матрицы $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{M}$, $\underset{\sim}{B}$.

Для доверительных троек анализ может проводиться так же, как и для доверительных интервалов. В этом случае можно проводить расчеты по правым и левым концам доверительных интервалов, а также по значениям максимума предполагаемого значения.

Возвратимся сейчас к случайным нечетким матрицам. Пусть $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$, $B=\{b_1,b_2,b_3\}$ и по схеме, изложенной в § 9, с помощью 10 экспертов найдены следующие элементарные и накопленные вероятности при оценке инциденций множества A на A, множества A на B и множества B на B (табл. 11.1—11.6).

Таблица 11.1

	a_1	a_2	a_3	a_4
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	.2	0
	0	0	.3	0
	0	0	.3	.5
a_1	0	0	.1	0
	0	0	.1	.2
	0	0	0	.3
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	1	1	0	0
	1	0	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	.2
	0	0	0	.4
	0	0	.1	.2
a_2	0	0	.1	.1
	0	0	.1	0
	0	0	.1	0
	0	0	.1	.1
	0	0	.3	0
	0	1	.2	0

	a_1	a_2	a_3	a_4
	.2	0	0	0
	.4	0	0	0
	.1	0	0	0
	.1	.2	0	0
	0	.2	0	0
	0	0	0	0
a_3	.2	.3	0	0
	0	.1	0	0
	0	0	0	0
	0	0	0	0
	0	.2	1	1
	0	1	0	0
	0	0	.4	0
	0	0	.3	0
	.2	0	.2	0
	0	0	.1	0
a_4	.1	0	0	0
	.1	0	0	0
	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	0	0	0	0
	.5	0	0	1

Таблица 11.2

$\underset{\sim}{A} =$

		a_1	a_2	a_3	a_4
a_1	0	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1
	.3	1	1	.8	1
	.4	1	1	.5	1
	.5	1	1	.2	.5
	.6	1	1	.1	.5
	.7	1	1	0	.3
	.8	1	1	0	0
	.9	1	1	0	0
	1	1	1	0	0
a_2	0	1	1	1	1
	.1	0	1	1	1
	.2	0	1	1	1
	.3	0	1	1	.8
	.4	0	1	1	.4
	.5	0	1	.9	.2
	.6	0	1	.8	.1
	.7	0	1	.7	.1
	.8	0	1	.6	.1
	.9	0	1	.5	0
	1	0	1	.2	0
a_3	0	1	1	1	1
	.1	.8	1	1	1
	.2	.4	1	1	1
	.3	.3	1	1	1
	.4	.2	.8	1	1
	.5	.2	.6	1	1
	.6	.2	.6	1	1
	.7	0	.3	1	1
	.8	0	.2	1	1
	.9	0	.2	1	1
	1	0	.2	1	1
a_4	0	1	1	1	1
	.1	1	0	1	1
	.2	1	0	.6	1
	.3	1	0	.3	1
	.4	.8	0	.1	1
	.5	.8	0	0	1
	.6	.7	0	0	1
	.7	.6	0	0	1
	.8	.6	0	0	1
	.9	.5	0	0	1
	1	.5	0	0	1

Т а б л и ц а 11.3

		b_1	b_2	b_3
a_1	0	0	1	0
	.1	0	0	0
	.2	.2	0	0
	.3	0	0	0
	.4	.4	0	0
	.5	.1	0	.1
	.6	.2	0	0
	.7	.1	0	.2
	.8	0	0	.3
	.9	0	0	0
	1	0	0	.4
a_2	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	.7	0	0
	.3	.1	0	0
	.4	.1	0	0
	.5	.1	0	0
	.6	0	.2	0
	.7	0	.3	0
	.8	0	.3	0
	.9	0	.2	.9
	1	0	0	.1
a_3	0	0	0	1
	.1	.7	0	0
	.2	.1	0	0
	.3	.2	0	0
	.4	0	0	0
	.5	0	0	0
	.6	0	.2	0
	.7	0	.4	0
	.8	0	.3	0
	.9	0	0	0
	1	0	.1	0
a_4	0	.1	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	0	0	0
	.4	.5	.2	.2
	.5	0	.3	0
	.6	.1	.3	.1
	.7	0	.1	0
	.8	.1	.1	0
	.9	0	0	0
	1	.2	0	.7

Т а б л и ц а 11.4

$\underset{\sim}{M}$ =

		b_1	b_2	b_3
a_1	0	1	1	1
	.1	1	0	1
	.2	1	0	1
	.3	.8	0	1
	.4	.8	0	1
	.5	.4	0	1
	.6	.3	0	.9
	.7	.1	0	.9
	.8	0	0	.7
	.9	0	0	.4
	1	0	0	.4
a_2	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	.3	1	1
	.4	.2	1	1
	.5	.1	1	1
	.6	0	1	1
	.7	0	.8	1
	.8	0	.5	1
	.9	0	.2	1
	1	0	0	.1
a_3	0	1	1	1
	.1	1	1	0
	.2	.3	1	0
	.3	.2	1	0
	.4	0	1	0
	.5	0	1	0
	.6	0	1	0
	.7	0	.8	0
	.8	0	.4	0
	.9	0	.1	0
	1	0	.1	0
a_4	0	1	1	1
	.1	.9	1	1
	.2	.9	1	1
	.3	.9	1	1
	.4	.9	1	1
	.5	.4	.8	.8
	.6	.4	.5	.8
	.7	.3	.2	.7
	.8	.3	.1	.7
	.9	.2	0	.7
	1	.2	0	.7

Т а б л и ц а 11.5

	α	b_1	b_2	b_3
b_1	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	.7
	.3	0	0	.1
	.4	0	.2	.2
	.5	0	.1	0
	.6	0	0	0
	.7	0	.2	0
	.8	0	0	0
	.9	0	0	0
	1	1	.5	0
b_2	0	1	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	0	0	.2
	.4	0	0	.2
	.5	0	0	0
	.6	0	0	.2
	.7	0	0	.1
	.8	0	0	0
	.9	0	0	0
	1	0	1	.3
b_3	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	0	.2	0
	.4	.4	0	0
	.5	.1	0	0
	.6	0	0	0
	.7	0	.2	0
	.8	.1	.3	0
	.9	.1	.2	0
	1	.3	.1	1

Т а б л и ц а 11.6

$\underset{\sim}{B} =$

	α	b_1	b_2	b_3
b_1	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	.3
	.4	1	1	.2
	.5	1	.8	0
	.6	1	.7	0
	.7	1	.7	0
	.8	1	.5	0
	.9	1	.5	0
	1	1	.5	0
b_2	0	1	1	1
	.1	0	1	1
	.2	0	1	1
	.3	0	1	1
	.4	0	1	.8
	.5	0	1	.6
	.6	0	1	.6
	.7	0	1	.4
	.8	0	1	.3
	.9	0	1	.3
	1	0	1	.3
b_3	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	1
	.4	1	.8	1
	.5	.6	.8	1
	.6	.5	.8	1
	.7	.5	.8	1
	.8	.5	.6	1
	.9	.4	.3	1
	1	.3	.1	1

Определим теперь $\underset{\sim}{M}^* = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}$. Для этого для каждого уровня ($\alpha = 1, 0.9, 0.8, \ldots, 0.1, 0$) вычислим $\underset{\sim}{M}^*$:

$$\underset{\sim}{M}^*_1 = \begin{array}{c|cccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & .2 & 0 \\ a_3 & 0 & .2 & 1 & 1 \\ a_4 & .5 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & .4 \\ a_2 & 0 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & .1 & 0 \\ a_4 & .2 & 0 & .7 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline b_1 & 1 & .5 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & .3 \\ b_3 & .3 & .1 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .3 & .1 & 1 \\ a_2 & .3 & .1 & 1 \\ a_3 & .3 & .2 & .7 \\ a_4 & .3 & .2 & .7 \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}^{*}_{0.9} = \begin{array}{c|cccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & .5 & 0 \\ a_3 & 0 & .2 & 1 & 1 \\ a_4 & .5 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & .4 \\ a_2 & 0 & .2 & 1 \\ a_3 & 0 & .1 & 0 \\ a_4 & .2 & 0 & .7 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline b_1 & 1 & .5 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & .3 \\ b_3 & .4 & .3 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .4 & .3 & 1 \\ a_2 & .4 & .3 & 1 \\ a_3 & .4 & .3 & .7 \\ a_4 & .4 & .3 & .7 \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}^{*}_{0.8} = \begin{array}{c|cccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & 1 & .6 & .1 \\ a_3 & 0 & .2 & 1 & 1 \\ a_4 & .6 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & .7 \\ a_2 & 0 & .5 & 1 \\ a_3 & 0 & .4 & 0 \\ a_4 & .3 & .1 & .7 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline b_1 & 1 & .5 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & .3 \\ b_3 & .5 & .6 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .5 & .6 & 1 \\ a_2 & .5 & .6 & 1 \\ a_3 & .5 & .6 & .7 \\ a_4 & .5 & .6 & .7 \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}^{*}_{0.7} = \begin{array}{c|cccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & 0 & .3 \\ a_2 & 0 & 1 & .7 & .1 \\ a_3 & 0 & .3 & 1 & 1 \\ a_4 & .6 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .1 & 0 & .9 \\ a_2 & 0 & .8 & 1 \\ a_3 & 0 & .8 & 0 \\ a_4 & .3 & .2 & .7 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline b_1 & 1 & .7 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & .4 \\ b_3 & .5 & .8 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .5 & .8 & 1 \\ a_2 & .5 & .8 & 1 \\ a_3 & .5 & .8 & .7 \\ a_4 & .5 & .7 & .7 \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}^{*}_{0.6} = \begin{array}{c|cccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & .1 & .5 \\ a_2 & 0 & 1 & .8 & .1 \\ a_3 & .2 & .6 & 1 & 1 \\ a_4 & .7 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .3 & 0 & .9 \\ a_2 & 0 & 1 & 1 \\ a_3 & 0 & .1 & 0 \\ a_4 & .4 & .5 & .8 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline b_1 & 1 & .7 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & .6 \\ b_3 & .5 & .8 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .5 & 1 & 1 \\ a_2 & .5 & 1 & 1 \\ a_3 & .5 & 1 & .8 \\ a_4 & .5 & .8 & .8 \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}^{*}_{0.5} = \begin{array}{c|cccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & .2 & .5 \\ a_2 & 0 & 1 & .9 & .2 \\ a_3 & .2 & .6 & 1 & 1 \\ a_4 & .8 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .4 & 0 & 1 \\ a_2 & .1 & 1 & 1 \\ a_3 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & .4 & .8 & .8 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline b_1 & 1 & .8 & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & .6 \\ b_3 & .6 & .8 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .6 & 1 & 1 \\ a_2 & .6 & 1 & 1 \\ a_3 & .6 & 1 & .8 \\ a_4 & .6 & .8 & .8 \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}^{*}_{0.4} = \begin{array}{c|cccc|} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & .5 & 1 \\ a_2 & 0 & 1 & 1 & .4 \\ a_3 & .2 & .8 & 1 & 1 \\ a_4 & .8 & 0 & .1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .8 & 0 & 1 \\ a_2 & .2 & 1 & 1 \\ a_3 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & .9 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline b_1 & 1 & 1 & .2 \\ b_2 & 0 & 1 & .8 \\ b_3 & 1 & .8 & 1 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{c|ccc|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & 1 \\ a_2 & 1 & 1 & 1 \\ a_3 & 1 & 1 & 1 \\ a_4 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

В матрицах $\underset{\sim}{M}^*_{0.3}$, $\underset{\sim}{M}^*_{0.2}$, $\underset{\sim}{M}^*_{0.1}$, $\underset{\sim}{M}^*_{0}$ все элементы равны 1. Выпишем только матрицы $\underset{\sim}{M}_{0.3}$, $\underset{\sim}{M}_{0.2}$, $\underset{\sim}{M}_{0.1}$:

$$\underset{\sim}{M}_{0.3} = \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .8 & 0 & 1 \\ \hline a_2 & .3 & 1 & 1 \\ \hline a_3 & .2 & 1 & 0 \\ \hline a_4 & .9 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}_{0.2} = \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline a_2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline a_3 & .3 & 1 & 0 \\ \hline a_4 & .9 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\underset{\sim}{M}_{0.1} = \begin{array}{c|c|c|c|} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 1 \\ \hline a_2 & 1 & 1 & 1 \\ \hline a_3 & 1 & 1 & 0 \\ \hline a_4 & .9 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

В целом случайные нечеткие инциденции множества А на В характеризуются накопленными вероятностями для всех уровней (табл. 11.7). По этой информации находятся элементарные вероятности инциденций множества А на В для всех уровней (табл. 11.8).

Таблица 11.7

$\underset{\sim}{M}^* =$

		b_1	b_2	b_3
	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	1
a_1	.4	1	1	1
	.5	.6	1	1
	.6	.5	1	1
	.7	.5	.8	1
	.8	.5	.6	1
	.9	.4	.3	1
	1	.3	.1	1
	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	1
a_2	.4	1	1	1
	.5	.6	1	1
	.6	.5	1	1
	.7	.5	.8	1
	.8	.5	.6	1
	.9	.4	.3	1
	1	.3	.1	1
	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	1
a_3	.4	1	1	1
	.5	.6	1	.8
	.6	.5	1	.8
	.7	.5	.8	.7
	.8	.5	.6	.7
	.9	.4	.3	.7
	1	.3	.2	.7
	0	1	1	1
	.1	1	1	1
	.2	1	1	1
	.3	1	1	1
a_4	.4	1	1	1
	.5	.6	.8	.8
	.6	.5	.8	.8
	.7	.5	.7	.7
	.8	.5	.6	.7
	.9	.4	.3	.7
	1	.3	.2	.7

Таблица 11.8

		b_1	b_2	b_3
	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	0	0	0
a_1	.4	.4	0	0
	.5	.1	0	0
	.6	0	.2	0
	.7	0	.2	0
	.8	.1	.3	0
	.9	.1	.2	0
	1	.3	.1	1
	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	0	0	0
a_2	.4	.4	0	0
	.5	.1	0	0
	.6	0	.2	0
	.7	0	.2	0
	.8	.1	.3	0
	.9	.2	.2	0
	1	.3	.1	1
	0	0	0	1
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	0	0	0
a_3	.4	.4	0	.2
	.5	.1	0	0
	.6	0	.2	.1
	.7	0	.2	0
	.8	.1	.3	0
	.9	.1	.1	0
	1	.3	.2	.7
	0	0	0	0
	.1	0	0	0
	.2	0	0	0
	.3	0	0	0
a_4	.4	.4	.2	.2
	.5	.1	0	0
	.6	0	.1	.1
	.7	0	.1	0
	.8	0	.1	0
	.9	.1	.1	0
	1	.3	.2	.7

Теперь по элементарным вероятностям,приведенным в табл. 11.3 и 11.8, найдем математические ожидания для дискретной случайной величины α со значениями 0,0.1,...,0.9,1. Как известно, математическое ожидание дискретной случайной величины определяется как сумма произведений каждого из значений этой величины и вероятности его появления. Таким образом, получим :

$$\varepsilon(\underset{\sim}{M}^*) = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0.68 & 0.78 & 1 \\ a_2 & 0.68 & 0.78 & 1 \\ a_3 & 0.68 & 0.79 & 0.84 \\ a_4 & 0.68 & 0.74 & 0.84 \end{array} \qquad \varepsilon(\underset{\sim}{M}) = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0.44 & 0 & 0.83 \\ a_2 & 0.26 & 0.75 & 1 \\ a_3 & 0.15 & 0.74 & 0 \\ a_4 & 0.54 & 0.56 & 0.84 \end{array}$$

Далее можно найти разность :

$$\varepsilon(\underset{\sim}{M}^*) - \varepsilon(\underset{\sim}{M}) = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .24 & .78 & .17 \\ a_2 & .42 & .03 & 0 \\ a_3 & .53 & .05 & .84 \\ a_4 & .14 & .18 & 0 \end{array}$$

Сравнивая эту матрицу с $\varepsilon(\underset{\sim}{M})$, видим, что существенно проявляется скрытое воздействие a_3 на b_3 и a_1 на b_2. Определим теперь, например, для первой пары и каждого уровня α промежуточные факторы, которые не учитываются непосредственно. Для этого используем следующие схемы :

$$\alpha = 1: \quad \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & 0 & .2 & 1 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0 & 0 & .4 \\ a_2 & 0 & 0 & 1 \\ a_3 & 0 & .1 & 0 \\ a_4 & .2 & 0 & .7 \end{array} \circ \begin{array}{c|c} & b_3 \\ \hline b_1 & 0 \\ b_2 & .3 \\ b_3 & 1 \end{array} = 0.7$$

$$a_3 \to a_4 \to b_3 \to b_3$$

$$\alpha = 0.9: \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ a_3 & \begin{bmatrix} 0 & .2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & .4 \\ 0 & .2 & 1 \\ 0 & .1 & 0 \\ .2 & 0 & .7 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & b_3 \\ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 \\ .3 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} = 0.7$$

$a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3$

$$\alpha = 0.8: \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ a_3 & \begin{bmatrix} 0 & .2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & .7 \\ 0 & .5 & 1 \\ 0 & .4 & 0 \\ .3 & 1 & .7 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & b_3 \\ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 \\ .3 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} = 0.7$$

$a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3$

$$\alpha = 0.7: \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ a_3 & \begin{bmatrix} 0 & .3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{bmatrix} .1 & 0 & .9 \\ 0 & .8 & 1 \\ 0 & .8 & 0 \\ .3 & .2 & .7 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & b_3 \\ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 \\ .4 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} = 0.7$$

$a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3$

$$\alpha = 0.6: \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ a_3 & \begin{bmatrix} .2 & .6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{bmatrix} .3 & 0 & .9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ .4 & .5 & .8 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & b_3 \\ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 \\ .6 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} = 0.8$$

$a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3$

$$\alpha = 0.5: \quad \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{array} \\ a_3 & \begin{bmatrix} .2 & .6 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} b_1 & b_2 & b_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{array} & \begin{bmatrix} .4 & 0 & 1 \\ .1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ .4 & .8 & .8 \end{bmatrix} \end{array} \circ \begin{array}{cc} & b_3 \\ \begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} & \begin{bmatrix} 0 \\ .6 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array} = 0.8$$

$a_3 \rightarrow a_4 \rightarrow b_3 \rightarrow b_3$

$$\alpha = 0.4: \quad \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & .2 & .8 & 1 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .8 & 0 & 1 \\ a_2 & .2 & 1 & 1 \\ a_3 & 0 & 1 & 0 \\ a_4 & .9 & 1 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|c} & b_3 \\ \hline b_1 & .2 \\ b_2 & .8 \\ b_3 & 1 \end{array} = 1$$

$$a_3 \to a_4 \to b_3 \to b_3$$

$$\alpha = 0.3: \quad \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & .3 & 1 & 1 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & .8 & 0 & 1 \\ a_2 & .3 & 1 & 1 \\ a_3 & .2 & 1 & 0 \\ a_4 & .9 & 1 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|c} & b_3 \\ \hline b_1 & .3 \\ b_2 & 1 \\ b_3 & 1 \end{array} = 1$$

$$\begin{array}{ccccccc} & & a_2 & & & & \\ a_3 & \to & a_3 & \to & b_2 & \to & b_3 \\ & & a_4 & & b_3 & & \end{array}$$

$$\alpha = 0.2: \quad \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & .4 & 1 & 1 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 1 \\ a_2 & 1 & 1 & 1 \\ a_3 & .3 & 1 & 0 \\ a_4 & .9 & 1 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|c} & b_3 \\ \hline b_1 & 1 \\ b_2 & 1 \\ b_3 & 1 \end{array} = 1$$

$$\begin{array}{ccccccc} a_3 & \to & a_2 & \to & b_1 & \to & b_3 \\ & & a_3 & & b_2 & & \\ & & a_4 & & b_3 & & \end{array}$$

$$\alpha = 0.1: \quad \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_3 & .8 & 1 & 1 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 1 & 0 & 1 \\ a_2 & 1 & 1 & 1 \\ a_3 & 1 & 1 & 0 \\ a_4 & .9 & 1 & 1 \end{array} \circ \begin{array}{c|c} & b_3 \\ \hline b_1 & 1 \\ b_2 & 1 \\ b_3 & 1 \end{array} = 1$$

$$\begin{array}{ccccccc} a_3 & \to & a_2 & \to & b_1 & \to & b_3 \\ & & a_3 & & b_2 & & \\ & & a_4 & & b_3 & & \end{array}$$

На всех уровнях встречается путь $a_3 \to a_4 \to b_3 \to b_3$*, т. е. существенное скрытое воздействие возникает через промежуточные инциденции a_3 на a_4, a_4 на b_3 и b_3 на b_3.

Интересно, что можно сократить расчеты, если композицию проводить прямо над математическими ожиданиями, соответствующими $\underset{\sim}{A}$, $\underset{\sim}{M}$ и $\underset{\sim}{B}$,. Для этого по табл. 11.1, 11.3 и 11.5 вычислим :

$$\varepsilon(\underset{\sim}{A}) = \begin{array}{c|cccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \hline a_1 & 1 & 1 & 0.36 & 0.53 \\ a_2 & 0 & 1 & 0.77 & 0.37 \\ a_3 & 0.21 & 0.59 & 1 & 1 \\ a_4 & 0.75 & 0 & 0.20 & 1 \end{array} \qquad \varepsilon(\underset{\sim}{M}) = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0.44 & 0 & 0.83 \\ a_2 & 0.26 & 0.75 & 1 \\ a_3 & 0.15 & 0.74 & 0 \\ a_4 & 0.54 & 0.56 & 0.84 \end{array}$$

$$\varepsilon(\underset{\sim}{B}) = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline b_1 & 1 & 0.77 & 0.25 \\ b_2 & 0 & 1 & 0.63 \\ b_3 & 0.68 & 0.72 & 1 \end{array}$$

$$\varepsilon(\underset{\sim}{A}) \circ \varepsilon(\underset{\sim}{M}) \circ \varepsilon(\underset{\sim}{B}) = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0.68 & 0.75 & 1 \\ a_2 & 0.68 & 0,75 & 1 \\ a_3 & 0.68 & 0.74 & 0.84 \\ a_4 & 0.68 & 0.72 & 0.84 \end{array}$$

$$\varepsilon(\underset{\sim}{A}) \circ \varepsilon(\underset{\sim}{M}) \circ \varepsilon(\underset{\sim}{B}) - \varepsilon(\underset{\sim}{M}) = \begin{array}{c|ccc} & b_1 & b_2 & b_3 \\ \hline a_1 & 0.24 & 0.75 & 0.17 \\ a_2 & 0.42 & 0 & 0 \\ a_3 & 0.53 & 0 & 0.84 \\ a_4 & 0.14 & 0.16 & 0 \end{array}$$

Так же, как и по разности $\varepsilon(\underset{\sim}{M}^*) - \varepsilon(\underset{\sim}{M})$, при таком подходе обнаруживаются скрытые воздействия a_3 на b_3 и a_1 на b_2. Для матриц большой размерности, когда большая точность не нужна, целесообразно применять именно этот метод.

В случае оценок, проводимых по доверительным интервалам или экспертонам, методика выявления скрытых воздействий и их промежуточных

* В общем случае для различных уровней такие пути могут быть различными. Тогда целесообразнее выбирать пути, соответствующие бо́льшим уровням.

причин аналогична вышеизложенной. Каким бы ни был тип используемой оценки, предположение о том, что $R \subset E \times E$ (матрица квадратная), упрощает расчеты. При использовании компьютера для анализа важно организовать диалог — фактически речь и идет об экспертной системе.

12. Некоторые свойства нечетких рефлексивных матриц

Рассмотрим три простые теоремы.

Теорема 12.1. Пусть $\underset{\sim}{M}$ - нечеткая рефлексивная матрица, т.е.

(12.1) $\quad \forall x \in E \quad \mu_{\underset{\sim}{M}}(x, x) = 1$.

Тогда $\underset{\sim}{M}^2$ - также нечеткая рефлексивная матрица, т.е.

(12.2) $\quad \forall x \in E \quad \mu_{\underset{\sim}{M}^2}(x, x) = 1$.

Доказательство. По определению имеем $\forall x,y,z \in E$

(12.3) $\quad \mu_{\underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{M}}(x, z) = \bigvee_{y} (\mu_{\underset{\sim}{M}}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}}(y, z))$.

Если $z = x$, то $\mu_{\underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{M}}(x, x) = \bigvee_{y} (\mu_{\underset{\sim}{M}}(x, y) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}}(y, x))$.

Из всех пар (x, y) существует по крайней мере одна, для которой $\mu_{\underset{\sim}{M}}(x, y)=1$, в частности при $y = x$ $\mu_{\underset{\sim}{M}}(x, x) = 1$, но тогда

$$\mu_{\underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{M}}(x, x) = \mu_{\underset{\sim}{M}}(x, x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}}(x, x) = 1 \wedge 1 = 1.$$

Поэтому можно считать, что если $\underset{\sim}{M}$ рефлексивна, то $\underset{\sim}{M}^2$ рефлексивна, или, в более общей форме, если $\underset{\sim}{M}$ рефлексивна, то $\underset{\sim}{M}^r$ рефлексивна при $r = 2,3,4,...$

Теорема 12.2. Если $\underset{\sim}{M}$ - нечеткая рефлексивная матрица, то $\forall x,y \in E \quad \mu_{\underset{\sim}{M}^2}(x, y) \geq \mu_{\underset{\sim}{M}}(x, y)$, т. е. $\underset{\sim}{M}^2 \supset \underset{\sim}{M}$.

Доказательство. В правой части формулы (12.3) под знаком $\bigvee_{y}$ имеются по крайней мере два одинаковых члена (при $x \neq y$ для $y=x$ и $y=z$). Тогда $\mu_{\underset{\sim}{M}}(x, x) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}}(x, z) = \mu_{\underset{\sim}{M}}(x, z) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}}(z, z) = \mu_{\underset{\sim}{M}}(z, z)$, поскольку $\mu_{\underset{\sim}{M}}(x, x) = \mu_{\underset{\sim}{M}}(z, z) = 1$.

Следовательно, $\mu_{\underset{\sim}{M}^2}(x, z)$ по крайней мере равно $\mu_{\underset{\sim}{M}}(x,z)$, так как все выражение с $\bigvee_{y}$ не может быть меньшим. Более того, может существовать $\mu_{\underset{\sim}{M}}(x,z) \wedge \mu_{\underset{\sim}{M}}(x,z)$, большее, чем $\mu_{\underset{\sim}{M}}(x,z)$. Поэтому

$$\forall x,y \in E \quad \mu_{\underset{\sim}{M}^2}(x, y) \geq \mu_{\underset{\sim}{M}}(x, y)$$

т. е. $\underset{\sim}{M}^2 \supset \underset{\sim}{M}$ или в более общей форме $\underset{\sim}{M}^{r+1} \supset \underset{\sim}{M}^r$, $r=1,2,3,...$

Теорема 12.3[*]. Если $\underset{\sim}{A}_{m\times m}$ и $\underset{\sim}{B}_{n\times n}$ -нечеткие рефлексивные матрицы и найдено $\underset{\sim}{M}^{*}_{m\times n} = \underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n} \circ \underset{\sim}{B}_{n\times n}$, то $\underset{\sim}{M}^{*}_{m\times n} \supset \underset{\sim}{M}_{m\times n}$.

Доказательство. Пусть $\underset{\sim}{A}_{m\times m}$-единичная матрица, тогда $\underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n} = \underset{\sim}{M}_{m\times n}$, но можно записать : $\underset{\sim}{A}_{m\times m} \supset \underset{\sim}{A}_{m\times m}$, и поэтому $\underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n} \supset \underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n} = \underset{\sim}{M}_{m\times n}$.

Аналогично, если $\underset{\sim}{B}_{n\times n}$ - единичная матрица, имеем $(\underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n}) \circ \underset{\sim}{B}_{n\times n} = \underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n}$, и так как $\underset{\sim}{B}_{n\times n} \supset \underset{\sim}{B}_{n\times n}$, получаем $(\underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n}) \circ \underset{\sim}{B}_{n\times n} \supset (\underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n}) \circ \underset{\sim}{B}_{n\times n} = \underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n}$. С учетом (12.4) находим $(\underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n}) \circ \underset{\sim}{B}_{n\times n} \supset \underset{\sim}{M}_{m\times n}$.

Так как операция $\circ$ ассоциативна, то $\underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n} \circ \underset{\sim}{B}_{n\times n} \supset \underset{\sim}{M}_{m\times n}$ или в более общей форме $\underset{\sim}{A}^{r+1}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n} \circ \underset{\sim}{B}^{r+1}_{n\times n} \supset \underset{\sim}{A}_{m\times m} \circ \underset{\sim}{M}_{m\times n} \circ \underset{\sim}{B}^{r}_{n\times n}$.

Эти теоремы использовались ранее в числовых примерах. Все они без затруднений переносятся на Ф-нечеткие матрицы, случайные нечеткие матрицы и матрицы с экспертонами, естественно, с сохранением специфики элементов, используемых в каждом из этих расширений.

13. Некоторые дополнительные приемы выявления скрытых воздействий

Если $\underset{\sim}{M}^{12}_{m\times n}$- нечеткая матрица, задающая инциденции E_1 на E_2 и $\underset{\sim}{M}^{23}_{n\times p}$- нечеткая матрица, задающая инциденции E_2 на E_3, то может представлять интерес значение инциденций E_1 на E_3 через инциденции E_1 на E_2 и E_2 на E_3. В этом случае рассчитываем $\underset{\sim}{M}^{13}_{m\times p} = \underset{\sim}{M}^{12}_{m\times n} \circ \underset{\sim}{M}^{23}_{n\times p}$.

Скрытые воздействия можно выявить, если априори установлена $\underset{\sim}{M}^{13}$ для непосредственных инциденций E_1 на E_3. Между элементами $\underset{\sim}{M}^{13}$ и $\underset{\sim}{M}^{13}$ существуют любые соотношения, и соответственно отклонения могут быть положительными, нулевыми или отрицательными. Если некоторые отклонения оказались существенными, то устанавливаются промежуточные инциденции и матрица уточняется. Рассмотрим пример. Пусть задана матрица инциденций A на C :

[*] Это утверждение приведено в § 6, а здесь дается его строгое доказательство.

$\underset{\sim}{M}_{AC} =$

	c1	c2	c3	c4
a1	.2	1	.6	1
a2	.5	.2	.5	.2
a3	.4	.8	1	.3

Пусть, кроме того, имеются матрицы инциденций A на B и B на C:

$\underset{\sim}{M}_{AB} =$

	b1	b2	b3	b4	b5
a1	.7	.8	0	.4	1
a2	1	1	.2	0	.3
a3	0	.4	0	.7	.5

$\underset{\sim}{M}_{BC} =$

	c1	c2	c3	c4
b1	.3	.2	.4	1
b2	0	.3	.5	.9
b3	.8	.4	.5	0
b4	0	.3	.6	.9
b5	.8	.8	1	1

Для этих матриц найдем

$\underset{\sim}{M}_{AB} - \underset{\sim}{M}_{BC} =$

	c1	c2	c3	c4
a1	.8	.8	1	1
a2	.3	.3	.5	1
a3	.5	.5	.6	.7

Вычислим отклонения :

$\underset{\sim}{M}_{AC} - \underset{\sim}{M}_{AB} \circ \underset{\sim}{M}_{BC} =$

	c1	c2	c3	c4
a1	-0.6	0.2	-0.4	0
a2	0.2	-0.1	0	-0.8
a3	-0.1	0.3	0.4	-0.4

Видно, что существенное отклонение соответствует паре (a_2, c_4). Для этой пары восстановим все промежуточные инциденции через B (рис 13.1).

Очевидно, что рассматриваемое отклонение определяется на путях $a_2 \to b_1 \to c_4$ и $a_2 \to b_2 \to c_4$. Аналогичным образом можно было бы изучать найденное отклонение, соответствующее паре (a_1, c_1).

Перейдем сейчас к расмотрению другого возможного случая. Пусть определены матрица $\underset{\sim}{A}$ инциденций A на A (квадратная рефлексивная матрица) и прямоугольная матрица $\underset{\sim}{M}_{AB}$ инциденций A на B. Вычислим $\underset{\sim}{M}_{AB} = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}_{AB}$. Как показано в предыдущем параграфе, $\underset{\sim}{M}_{AB} \supset \underset{\sim}{M}_{AB}$.

Вычислим разность $\underset{\sim}{M}_{AB} - \underset{\sim}{M}_{AB}$, которая используется для выявления скрытых воздействий. Подобным образом при наличии инциденций A на B и В на В вычисляется $\underset{\sim}{M}''_{AB} = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}_{AB}$ и разность $\underset{\sim}{M}''_{AB} - \underset{\sim}{M}_{AB}$. Свойство ассоциативности операции $\circ$ дает отношение $\underset{\sim}{M}'''_{AB} = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}_{AB} \circ \underset{\sim}{B}$, которое уже использовалось ранее.

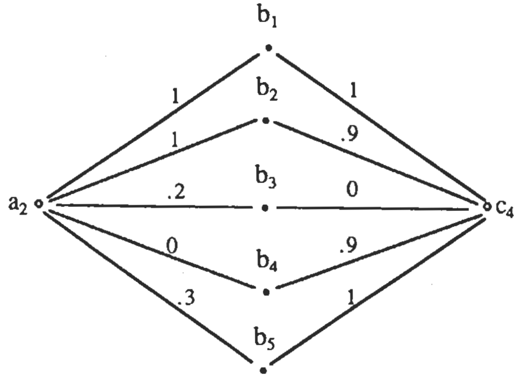


Рис 13.1

Изложенные приемы раскрывают широкие возможности для разработки новых процедур.

II. ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДОВ ПОИСКА СКРЫТЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ В ОБЩЕСТВЕННОЙ, ФИНАНСОВОЙ И ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ОБЛАСТЯХ

14. Скрытые воздействия при организации избирательной кампании

Хотя политические кампании, предшествующие выборам (всеобщим, муниципальным и др.), проводятся достаточно часто, как правило, незаметной остается большая работа, которую проводят эксперты, чтобы помочь своим кандидатам победить. Усилия этих профессионалов обычно направлены на то, чтобы представить общественному мнению (возможным избирателям) самые привлекательные стороны кандидатов, выделив те из них, которые могут положительно повлиять на результаты голосования большого числа граждан. Кандидаты в депутаты отбираются из членов политических партий по разным критериям; это люди, которым поручается представлять перед избирателями соответствующие политические идеалы и программы, и они могут подняться по должностным ступеням парламента или муниципалитета.

Избираемые политики по своим личным качествам отличаются друг от друга. Среди критериев отбора можно выделить, например, партийный стаж, выполняемые поручения, образование и профессию, имидж у публики, внешний облик, манеру одеваться, тембр голоса, манеру говорить, используемую лексику, общительность, личное обаяние, остроумие в дискуссии. Понятно, что этот перечень не является исчерпывающим: он может быть изменен в соответствии со страной и временем проводимых выборов. После определения кандидата или списка кандидатов готовится избирательная кампания. Она заключается в том, чтобы привести в движение определенные средства информации и довести до избирателей сведения, направленные на подтверждение или изменение их намерений отдать свои голоса, путем создания наиболее выгодного представления о кандидатах.

Мнение, которое создается о кандидате, является результатом наложения субъективной оценки избирателя на определенные качества, которыми предположительно обладает кандидат. Не претендуя на полное перечисление таких качеств, назовем следующие: b_1 - привлекательный облик; b_2 - симпатия населения; b_3 - чувство доверия; b_4 - серьезность; b_5 - твердость убеждений; b_6 - близость к избирателям; b_7 - популярность; b_8 - компетентность; b_9 - трудолюбие; b_{10} - профессионализм; b_{11} - личный авторитет; b_{12} - честность.

В качестве рабочей гипотезы можно предположить, что данные характерные качества кандидата дают возможность сформировать у избирателей представление о нем через субъективную оценку этих качеств. Цель избирательной кампании состоит в попытке увеличить значимость таких оценок, чтобы получить наибольшее число голосов. Это может быть достигнуто в результате ряда действий в определенных сферах, которые могут непосредственно повлиять с разной степенью интенсивности на оценку качеств кандидата. Так, например, статья в газете существенно влияет на повышение популярности и в значительно меньшей мере на рост личного авторитета.

Для определенности выберем следующие 16 действий, способных изменить оценки качеств кандидата : a_1 - заявления по ТВ; a_2 - ТВ новости; a_3 - реклама по ТВ; a_4 - заявления по радио; a_5 - новости по радио; a_6 - реклама по радио; a_7 - статьи в прессе; a_8 - новости в прессе; a_9 - реклама в прессе; a_{10} - плакаты на улицах; a_{11} - реклама на автомобилях; a_{12} - публикация книг; a_{13} - лекции; a_{14} - политические митинги; a_{15} - групповые собрания; a_{16} - посещение рынков.

Бесспорно, что существуют прямые причинно-следственные отношения между действиями любых из перечисленных средств информации и оценками качеств кандидатов, и это чувствуют избиратели. Действие любого из указанных средств информации в различной степени влияет на оценку каждого из качеств кандидатов. Так, посещение рынка сможет намного повысить популярность кандидата, увеличит доверие к нему избирателей, но не окажет никакого влияния на профессионализм.

Количественный анализ отношений между каждой из причин и каждым из следствий можно свести в прямоугольную матрицу размерностью 16×12 так, чтобы в любой ее клетке проявлялась в виде оценки прямая инциденция каждого средства информации на каждое из качеств. Если использовать одиннадцатиуровневую систему {0, 0.1, ..., 0.9, 1}, то в каждой из клеток появится один из этих баллов. Такой подход был предложен группе экспертов для того, чтобы узнать их мнение относительно значений этих инциденций. После соответствующих обсуждений они пришли к общему мнению о том, что для настоящего времени и сложившейся социальной обстановки можно принять матрицу оценок качественных инциденций, представленную табл. 14.1.

Нужно, конечно, иметь в виду, что матрица $\underset{\sim}{M}$ не носит обобщающего характера, поскольку в ее разработке приняла участие сравнительно небольшая группа экспертов, и ее представительность внутри населения относительна, так как она принадлежит к конкретной географической зоне. Тем не менее, это совершенно не влияет на предложенную методику анализа.

Т а б л и ц а 14.1

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}
a_1	.9	.7	1	.8	1	.8	.7	.5	.1	.4	.3	.2
a_2	.6	.6	.4	.5	.2	.8	.9	.5	.3	.5	.6	.3
a_3	.7	.9	.5	.3	.7	1	.8	.6	.3	.2	.1	.2
a_4	0	.3	.4	.5	.7	.5	.2	.3	.1	.4	.2	.2
a_5	0	.1	.2	.1	.4	0	.3	.2	0	.3	.5	.2
a_6	.2	.4	.3	0	.3	.5	.4	.1	0	.1	.1	.1
a_7	.1	0	.1	.6	.7	0	0	.8	.6	1	.9	.3
a_8	.2	.1	.1	.2	.2	.1	0	.1	0	.1	.2	.2
a_9	.3	.2	0	0	.4	.3	.5	0	0	0	.1	.1
a_{10}	.5	.6	0	0	0	.8	.7	0	0	0	0	0
a_{11}	0	0	0	0	0	.2	.3	0	0	0	0	0
a_{12}	.1	.1	0	.4	.1	0	.2	.9	.8	.7	1	.4
a_{13}	.2	0	.6	.8	.7	.1	0	.8	.5	.6	.4	.1
a_{14}	.3	.6	.7	.4	.9	.7	.8	.3	.2	0	.2	.6
a_{15}	.4	0	.7	.8	.7	0	0	.7	.2	.6	.4	.8
a_{16}	.7	.8	.5	0	0	1	.7	0	0	0	0	0

С помощью матрицы, представленной табл. 14.1, осуществлена определенная классификация непосредственных причинно-следственных отношений. Однако, если остановиться на этом, нельзя будет продвинуться вперед далее, чем при использовании любого другого способа упорядочивания отношений. Наша цель заключается в другом, а именно: мы пытаемся определить, какие следствия производит причина не только сама по себе, но и через другие отношения "следствие-причина" таким образом, чтобы в каждом следствии накапливался результат как непосредственной причины, так и всех косвенных, вторичных следствий. Для этого реализуем следующую схему.

Построим квадратную матрицу $\underset{\sim}{A}$, в которой количественно отражаются инциденции каждого из принятых действий на другие действия. Снова эти инциденции оцениваются экспертами по одиннадцатибалльной системе из множества {0, 0.1, 0.2, ..., 0.9, 1}.

Так, по мнению экспертов, инциденция заявления по ТВ на новость в прессе оценивается величиной 0.6. Это объясняется тем, что пресса использует в большой степени материалы, передаваемые по ТВ. Менее вероятно, что лекция, прочитанная кандидатом, вызовет заявления по радио. Вся такая информация экспертов собирается в нечеткую матрицу $\underset{\sim}{A}$, представленную табл. 14.2.

Т а б л и ц а .14.2

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
a_1	1	.7	0	.5	.6	0	0	.6	0	0	0	.2	.2	0	0	0
a_2	.4	1	0	0	.4	0	0	.4	0	0	0	0	.1	0	.4	0
a_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	.2	0	.3	0
a_4	.3	.5	0	1	.8	0	0	.5	0	0	0	.2	.1	0	.2	0
a_5	.1	.4	0	.2	1	0	0	.5	0	0	0	0	.1	0	.2	0
a_6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	.2	0	.2	0
a_7	.2	.4	0	.3	.5	0	1	.1	0	0	0	.3	.4	0	.5	0
a_8	.3	.4	0	.2	.5	0	0	1	0	0	0	0	.3	0	.4	0
a_9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	.4	0
a_{10}	0	.1	0	0	.2	0	0	.2	0	1	0	0	0	0	.1	0
a_{11}	0	.3	0	0	.4	0	0	.4	0	0	1	0	0	0	.1	0
a_{12}	.6	.7	.6	.7	.8	.7	.8	.8	.8	.5	.6	1	.9	0	.7	0
a_{13}	.1	.6	0	.3	.7	0	.6	.7	0	0	0	.7	1	0	.6	0
a_{14}	.6	.8	0	.7	.9	0	0	.9	0	0	.5	0	0	1	.2	0
a_{15}	.1	.4	0	.2	.5	0	0	.5	0	0	0	0	.2	0	1	0
a_{16}	0	.3	0	0	.4	0	0	.4	0	0	0	0	0	0	0	1

После этого переходим к разработке еще одной квадратной матрицы $\underset{\sim}{B}$, образованной нечетким причинно-следственным отношением, в которой строки и столбцы соответствуют качествам кандидата. Очевидно, что "симпатия населения", например, имеет большую инциденцию на "близость к избирателям" (в нашем случае эксперты оценили это отношение в 0.9), в то время, как "приятная внешность" оказывает малое влияние на "профессионализм" (этому отношению дана оценка 0.2). В итоге получается нечеткая матрица $\underset{\sim}{B}$, представленная табл. 14.3.

Вычислим далее матрицу $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}$ как результат свертки maxmin матриц $\underset{\sim}{A}$ и $\underset{\sim}{M}$. Так, используя строку 1 матрицы $\underset{\sim}{A}$ и столбец 1 матрицы $\underset{\sim}{M}$ найдем, что в клетке (1,1) матрицы $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}$ должна быть оценка 0.9. В самом деле, свертка maxmin дает :

$(1 \wedge .9) \vee (.7 \wedge .6) \vee (0 \wedge .7) \vee (.5 \wedge 0) \vee (.6 \wedge 0) \vee (0 \wedge .2) \vee (0 \wedge .1) \vee (.6 \wedge .2) \vee$
$\vee (0 \wedge .3) \vee (0 \wedge .5) \vee (0 \wedge 0) \vee (.2 \wedge .1) \vee (.2 \wedge .2) \vee (0 \wedge .3) \vee (0 \wedge .4) \vee (0 \wedge .7) =$
$= .9 \vee .6 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee .2 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 1 \vee .2 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = .9$.

Аналогично в клетке (1, 2) матрицы $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}$ следует поместить 0.7, поскольку для строки 1 из $\underset{\sim}{A}$ и столбца 2 из $\underset{\sim}{M}$ будем иметь :

$.7 \vee .6 \vee 0 \vee .3 \vee .1 \vee 0 \vee 0 \vee .1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee .1 \vee 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = .7$.

Таким образом, последовательно получим матрицу $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}$, представленную табл. 14.4.

Таблица 14.3

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}
b_1	1	.5	.6	.6	.2	.8	.8	.3	.1	.2	.3	.5
b_2	.7	1	.5	.2	.4	.9	1	0	0	0	.2	.4
b_3	.6	.5	1	.9	0	.8	.4	0	0	0	.1	1
b_4	.3	0	.7	1	.5	0	0	.2	.1	0	.5	.5
b_5	.6	.4	.8	.9	1	.1	.2	0	0	0	.3	.4
b_6	.2	1	.9	0	0	1	1	0	0	0	0	0
b_7	.5	1	.2	0	0	1	1	0	0	0	0	0
b_8	.7	.3	.8	.9	0	0	0	1	0	.6	.8	0
b_9	.7	.7	.5	.4	0	0	.1	.3	1	.8	.6	0
b_{10}	.5	.1	0	.4	0	0	.2	.9	0	1	.7	0
b_{11}	.8	.5	.7	.6	.5	0	.1	0	0	0	1	0
b_{12}	.9	.8	1	1	0	.3	.6	.1	0	0	.8	1

Таблица 14.4

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}
a_1	.9	.7	1	.8	1	.8	.7	.5	.3	.5	.6	.3
a_2	.6	.6	.4	.5	.4	.8	.9	.5	.3	.5	.6	.4
a_3	.7	.9	.5	.3	.7	1	.8	.6	.3	.3	.3	.3
a_4	.4	.5	.4	.5	.7	.5	.5	.5	.3	.5	.5	.3
a_5	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.3	.4	.5	.3
a_6	.2	.4	.3	.2	.3	.5	.4	.2	.2	.2	.2	.2
a_7	.4	.4	.5	.6	.7	.4	.4	.8	.6	1	.9	.5
a_8	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.4	.3	.4	.5	.4
a_9	.4	.2	.4	.4	.4	.3	.5	.4	.2	.4	.4	.4
a_{10}	.5	.6	.2	.2	.2	.8	.7	.2	.1	.2	.2	.2
a_{11}	.3	.3	.3	.3	.4	.3	.3	.3	.3	.3	.4	.3
a_{12}	.6	.6	.7	.8	.7	.7	.7	.9	.8	.8	1	.7
a_{13}	.6	.6	.6	.8	.7	.6	.6	.8	.7	.7	.7	.6
a_{14}	.6	.6	.7	.6	.9	.8	.8	.5	.3	.5	.6	.6
a_{15}	.4	.4	.7	.8	.7	.4	.4	.7	.3	.6	.5	.8
a_{16}	.7	.8	.5	.3	.4	1	.7	.3	.3	.3	.4	.3

Теперь для нахождения накопленных воздействий первого и второго порядков достаточно осуществить свертку $\max\min$ между матрицами $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}$ и $\underset{\sim}{B}$, т. е. вычислить новую нечеткую матрицу инциденции $\underset{\sim}{M}^{*} = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}$. Результат таких вычислений представлен табл. 14.5.

Таблица 14.5

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}
a_1	.9	.8	1	.9	1	.8	.8	.5	.3	.5	.6	1
a_2	.6	.9	.8	.6	.5	.9	.9	.5	.3	.5	.6	.5
a_3	.7	1	.9	.7	.7	1	1	.6	.3	.6	.6	.5
a_4	.6	.5	.7	.7	.7	.5	.5	.5	.3	.5	.5	.5
a_5	.5	.5	.5	.5	.5	.4	.4	.4	.3	.4	.5	.4
a_6	.4	.5	.5	.3	.4	.5	.5	.2	.2	.2	.3	.4
a_7	.8	.6	.8	.8	.7	.5	.5	.9	.6	1	.9	.5
a_8	.5	.5	.5	.5	.5	.4	.4	.4	.3	.4	.5	.4
a_9	.5	.5	.4	.4	.4	.5	.5	.4	.2	.4	.4	.4
a_{10}	.6	.8	.8	.5	.4	.8	.8	.3	.1	.2	.3	.5
a_{11}	.4	.4	.4	.4	.4	.3	.3	.3	.3	.3	.4	.4
a_{12}	.8	.7	.8	.9	.7	.7	.7	.9	.8	.8	1	.7
a_{13}	.7	.7	.8	.8	.7	.6	.6	.8	.7	.7	.8	.6
a_{14}	.6	.8	.8	.9	.9	.8	.8	.5	.3	.5	.6	.7
a_{15}	.8	.8	.8	.8	.7	.7	.6	.7	.3	.6	.8	.8
a_{16}	.7	1	.9	.6	.4	1	1	.3	.3	.3	.4	.5

Для нахождения воздействий второго порядка необходимо выработать способ, который позволил бы отделить от накопленных воздействий, имеющихся в матрице $\underset{\sim}{M}^{*}$, непосредственные воздействия, задаваемые исходной матрицей инциденций. Как уже отмечалось, эти способы могут быть различными. Для нашего случая можно принять гипотезу о том, что необходимые сведения получаются из простой алгебраической разности $\underset{\sim}{M}^{*} - \underset{\sim}{M}$ как матрица, элементами которой являются разности соответствующих элементов матриц $\underset{\sim}{M}^{*}$ и $\underset{\sim}{M}$.

Матрица $\underset{\sim}{M}^{*} - \underset{\sim}{M}$, представленная табл. 14.6, выявляет воздействия второго порядка. Можно отметить, в частности, что в ней имеется несколько клеток со значениями, близкими к 1. Это клетки (1,12) - влияние заявлений по ТВ на честность, (10,3) - влияние плакатов на улице на чувство доверия, (12,3) - влияние публикации книг на чувство доверия, (15,2) - влияние групповых собраний на популярность.

Т а б л и ц а 14.6

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}
a_1	0	.1	0	.1	0	0	.1	0	.2	.1	.3	.8
a_2	0	.3	.4	.1	.3	.1	0	0	0	0	0	.2
a_3	0	.1	.4	.4	0	0	.2	0	0	.4	.5	.3
a_4	.6	.2	.3	.2	0	0	.3	.2	.2	.1	.3	.3
a_5	.5	.4	.3	.4	.1	.4	.1	.2	.3	.1	0	.2
a_6	.2	.1	.2	.3	.1	0	.1	.1	.2	.1	.2	.3
a_7	.7	.6	.7	.2	0	.5	.5	.1	0	0	0	.2
a_8	.3	.4	.4	.3	.3	.3	.4	.3	.3	.3	.3	.2
a_9	.2	.3	.4	.4	0	.2	0	.4	.2	.4	.3	.3
a_{10}	.1	.2	.8	.5	.4	0	.1	.3	.1	.2	.3	.5
a_{11}	.4	.4	.4	.4	.4	.1	0	.3	.3	.3	.4	.4
a_{12}	.7	.6	.8	.5	.6	.7	.5	0	0	.1	0	.3
a_{13}	.5	.7	.2	0	0	.5	.6	0	.2	.1	.4	.5
a_{14}	.3	.2	.1	.5	0	.1	0	.2	.1	.5	.4	.1
a_{15}	.4	.8	.1	0	0	.7	.6	0	.1	0	.4	0
a_{16}	0	.2	.4	.6	.4	0	.3	.3	.3	.3	.4	.5

Для клеток (10,3), (12,3), (15,2) соответствующие причинно-следственные отношения не были приняты во внимание экспертами или же были сочтены очень слабыми, как в случае с клеткой (1,12). Таким образом, использование предложенного метода позволило восстановить скрытые воздействия.

Не нужно удивляться тому, что эксперты могут недооценить отдельные инциденции при наличии в анализируемых явлениях взаимозависимых причин и следствий. Это происходит почти во всех областях деятельности человека. Мозг человека способен прослеживать большое число косвенных связей между двумя явлениями через другие, расположенные между ними. Но было бы чрезмерным требовать от него, чтобы не было упущено ни одной из нитей, соединяющих многочисленные причинно-следственные отношения и образующих иногда густую "вуаль". Так, на рис.14.1 можно увидеть пути, которые необходимо учесть для того, чтобы от действия 1 (заявления по ТВ) добраться до качества 12 (честность). Это отношение практически игнорировалось экспертами, оценившими его в 0.2 (клетка (1,12) в матрице $\underset{\sim}{M}$). Но все это необходимо повторить для относительно простого отношения из 16 причин и 12 следствий, т. е. всего лишь 192 раза.

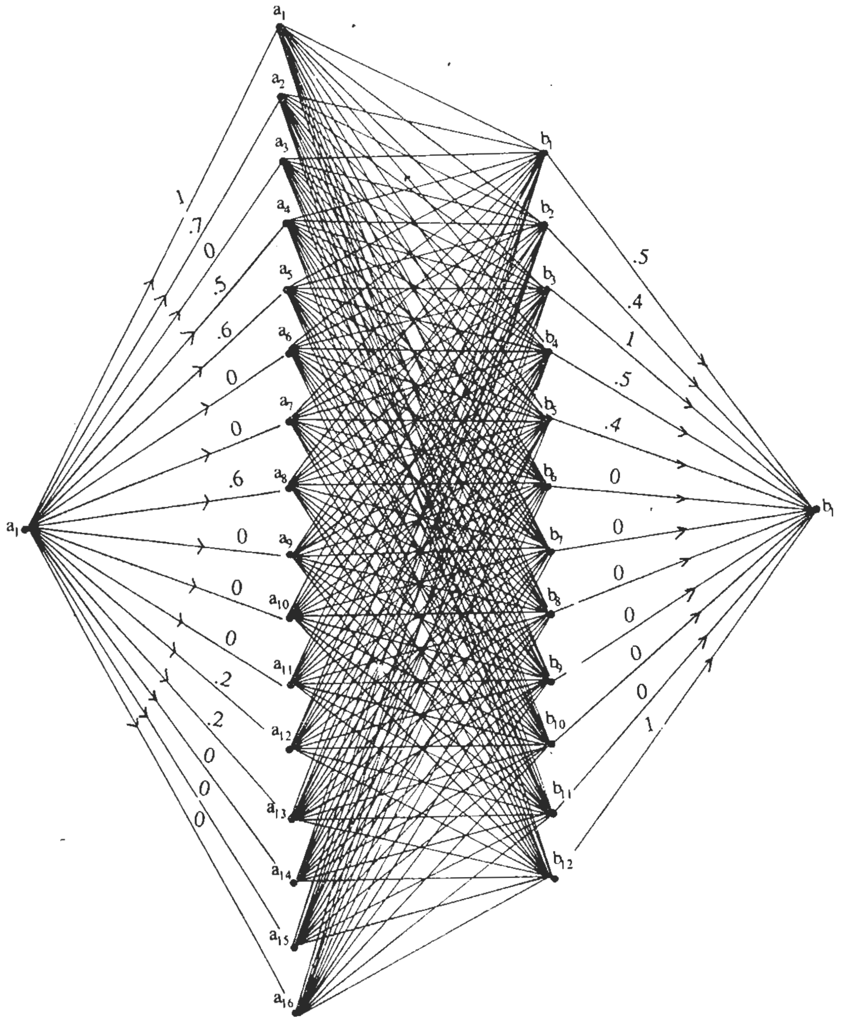


Рис. 14.1

Граф на рис.14.1 построен следующим образом. Установлено причинно-следственное отношение в виде дуги действия a_1 (заявления по ТВ) с каждым из 16 других действий в соответствии с оценками, содержащимися в матрице $\underset{\sim}{A}$. (Напоминаем, что в матрице $\underset{\sim}{A}$ оцениваются инциденции всех действий на самих себя.) Из каждой вершины a_j, $j = 1,2,...,16$, в которую приходит дуга из a_1, выходят новые дуги к вершинам b_k, $k=1,2,...,12$. Затем каждая из этих вершин соединяется дугой с конечной вершиной b_{12}.

Для того чтобы сделать этот процесс более понятным, представим на рис.14.2 его часть, на которой можно видеть инциденцию a_1 на b_{12}, исходя из инциденций a_1 на a_1 и далее через инциденции a_1 на b_1, b_2, ..., b_{12} и от каждого из них на b_{12}.

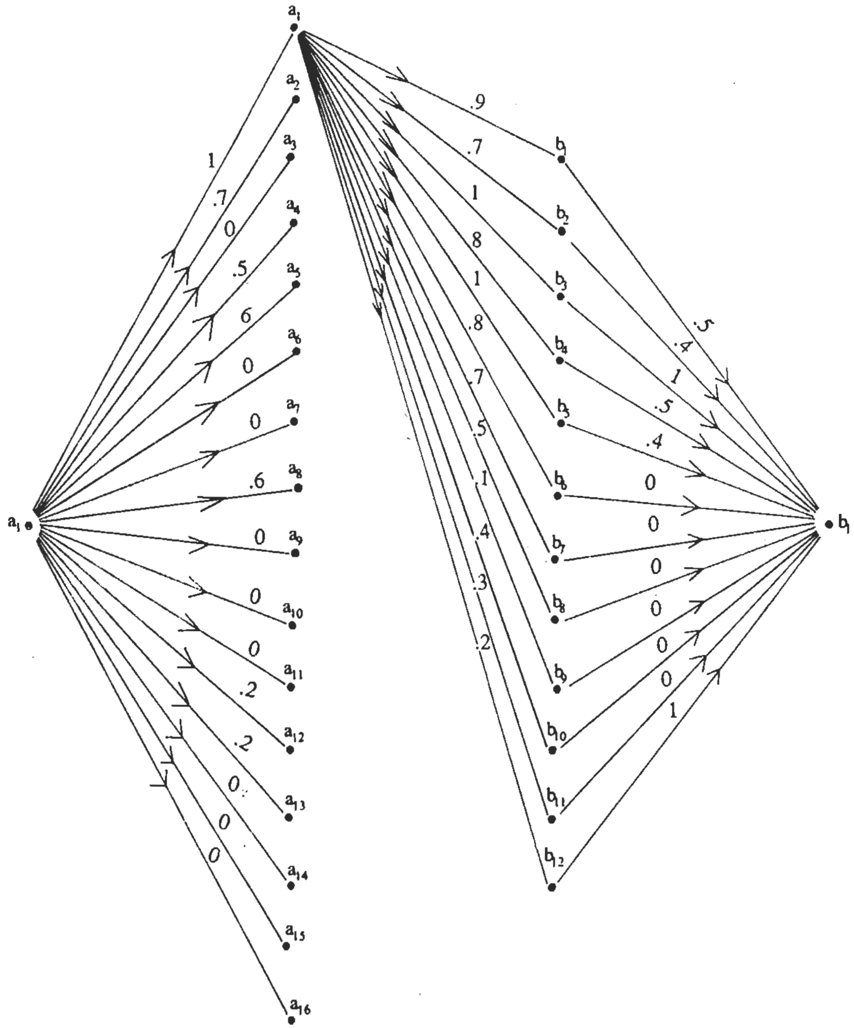


Рис. 14.2

Поскольку инциденция a_1 (заявления по ТВ) на a_1 (заявления по ТВ) равна 1, инциденция a_1 (заявления по ТВ) на b_1 (приятная внешность) — 0.9 и инциденция b_1 (приятная внешность) на b_{12} (честность) — 0.5, получаем накопленную на этом пути инциденцию $1 \wedge 0.9 \wedge 0.5 = 0.5$. При использовании второго пути находим, что инциденция a_1 (заявления по ТВ) на a_1 (заявления по ТВ) равна 1, инциденция a_1 (заявления по ТВ) на b_2 (симпатия населения) — 0.7 и инциденция b_2 (симпатия населения) на b_{12} (честность) — 0.4. В итоге на этом пути имеем накопленную инциденцию $1 \wedge 0.7 \wedge 0.4 = 0.4$. Перебирая подобным образом все оставшиеся пути, получим итоговую накопленную инциденцию, равную 0.5, поскольку

$$\bigvee_{k=1}^{12} (a_1 \wedge a_1 \wedge b_k \wedge b_{12}) = 0.5 .$$

Таким же образом можно было бы продолжать подробное рассмотрение отношений через инциденции каждого a_j на все b_k и последних на b_{12}. Однако для того, чтобы в более простой форме отразить схему вычислений, рассмотрим процесс по-другому. Вместо установления инциденций a_1 на себя и далее на все b_k, $k=1,2,\ldots,12$, соотнесем в первую очередь a_1 со всеми a_j, $j=1,2,\ldots,16$, для установления инциденций каждого a_j, $j=1,2,\ldots,16$, сначала на b_1, а потом b_1 на b_{12} (как показано на рис. 14.3), затем также через b_2 на b_{12}, потом через b_3 на b_{12} (как показано на рис. 14.4) и т.д.

Для восстановления пути от a_1 к b_{12}, соответствующего maxmin, можно последовательно строить определяющие пути от a_1 до b_1 (по рис. 14.3), от a_1 до b_2, от a_1 до b_3 (по рис. 14.4), ..., от a_1 до b_{12}. Для этого проведем следующие сравнения :

$a_1 \to b_1$	$a_1 \to b_2$	$a_1 \to b_3$
$1 \wedge 0.9 = 0.9 \leftarrow$	$1 \wedge 0.7 = 0.7 \leftarrow$	$1 \wedge 1 = 1 \leftarrow$
$0.7 \wedge 0.6 = 0.6$	$0.7 \wedge 0.6 = 0.6$	$0.7 \wedge 0.4 = 0.4$
$0 \wedge 0.7 = 0$	$0 \wedge 0.9 = 0$	$0 \wedge 0.5 = 0$
$0.5 \wedge 0 = 0$	$0.5 \wedge 0.3 = 0.3$	$0.5 \wedge 0.4 = 0.4$
$0.6 \wedge 0 = 0$	$0.6 \wedge 0.1 = 0.1$	$0.6 \wedge 0.2 = 0.2$
$0 \wedge 0.2 = 0$	$0 \wedge 0.4 = 0$	$0 \wedge 0.3 = 0$
$0 \wedge 0.1 = 0$	$0 \wedge 0 = 0$	$0 \wedge 0.1 = 0$
$0.6 \wedge 0.2 = 0.2$	$0.6 \wedge 0.1 = 0.1$	$0.6 \wedge 0.1 = 0.1$
$0 \wedge 0.3 = 0$	$0 \wedge 0.2 = 0$	$0 \wedge 0 = 0$
$0 \wedge 0.5 = 0$	$0 \wedge 0.6 = 0$	$0 \wedge 0 = 0$
$0 \wedge 0 = 0$	$0 \wedge 0 = 0$	$0 \wedge 0 = 0$
$0.2 \wedge 0.1 = 0.1$	$0.2 \wedge 0.1 = 0.1$	$0.2 \wedge 0 = 0$
$0.2 \wedge 0.2 = 0.2$	$0.2 \wedge 0 = 0$	$0.2 \wedge 0.6 = 0.2$
$0 \wedge 0.3 = 0$	$0 \wedge 0.6 = 0$	$0 \wedge 0.7 = 0$
$0 \wedge 0.4 = 0$	$0 \wedge 0 = 0$	$0 \wedge 0.7 = 0$
$0 \wedge 0.7 = 0$	$0 \wedge 0.8 = 0$	$0 \wedge 0.5 = 0$
максимум —0.9	максимум —0.7	максимум — 1

Так, последовательно найдем 0.8 для $a_1 \to b_4$, 1 для $a_1 \to b_5$, 0.8 для $a_1 \to b_6$, 0.7 для $a_1 \to b_7$, 0.5 для $a_1 \to b_8$, 0.3 для $a_1 \to b_9$, 0.5 для $a_1 \to b_{10}$, 0.6 для $a_1 \to b_{11}$, 0.3 для $a_1 \to b_{12}$. Продолжая расчеты от $b_1,\ldots,b_{12}$ до b_{12}, получим :

$a_1 \to b_1$	$0.7 \wedge 0 = 0$
$0.9 \wedge 0.5 = 0.5$	$0.6 \wedge 0.2 = 0.2$
$0.7 \wedge 0.4 = 0.4$	$0.5 \wedge 0 = 0$
$1 \wedge 1 = 1$ ←	$0.3 \wedge 0 = 0$
$0.8 \wedge 0.5 = 0.5$	$0.5 \wedge 0 = 0$
$1 \wedge 0.4 = 0.4$	$0.6 \wedge 0 = 0$
$0.8 \wedge 0 = 0$	$0.3 \wedge 1 = 0.3$

максимум — 1

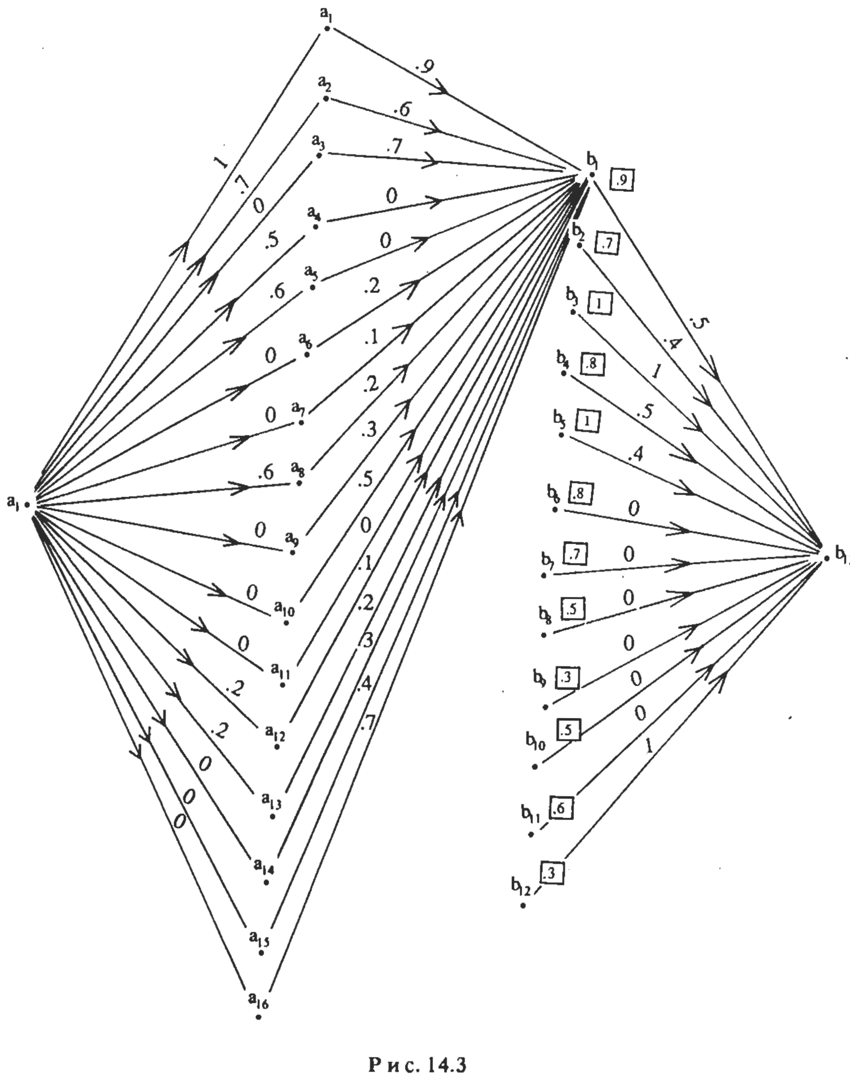


Рис. 14.3

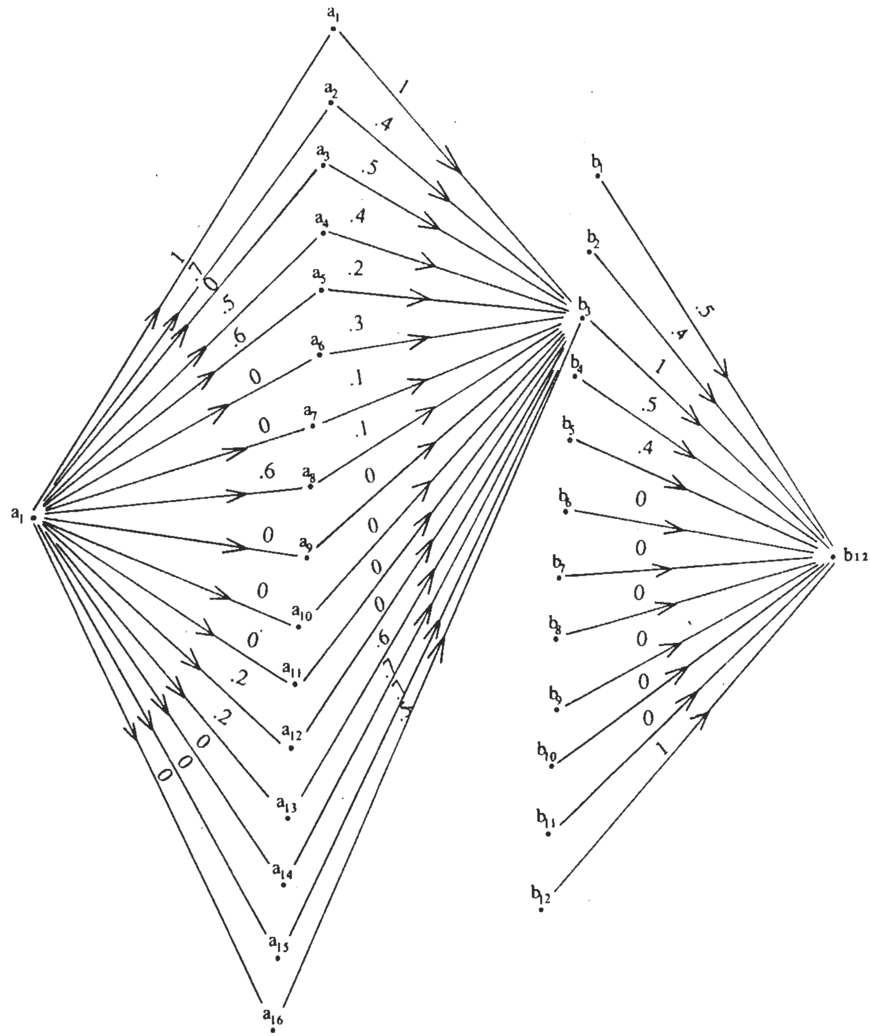


Рис. 14.4

Если использовать известный прием динамического программирования, переходя от конечной ситуации к начальной, найдем оптимальный путь : $a_1 \to a_1 \to b_3 \to b_{12}$. На рис .14.4 этот путь имеется на графе.

Более наглядно изложенный процесс представляется в матричной форме. Для приведенного примера соответствующие операции будут следующими :

6 Зак. 5504

↓

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	
a_1	1	.7	0	.5	.6	0	0	.6	0	0	0	.2	.2	0	0	0	∘

.9	.7	1	.8	1	.8	.7	.5	.1	.4	.3	.2	←
.6	.6	.4	.5	.2	.8	.9	.5	.3	.5	.6	.3	
.7	.9	.5	.3	.7	1	.8	.6	.3	.2	.1	.2	
0	.3	.4	.5	.7	.5	.2	.3	.1	.4	.2	.2	
0	.1	.2	.1	.4	0	.3	.2	0	.3	.5	.2	
.2	.4	.3	0	.3	.5	.4	.1	0	.1	.1	.1	=
.1	0	.1	.6	.7	0	0	.8	.6	1	.9	.3	
.2	.1	.1	.2	.2	.1	0	.1	0	.1	.2	.2	
.3	.2	0	0	.4	.3	.5	0	0	0	.1	.1	
.5	.6	0	0	0	.8	.7	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	.2	.3	0	0	0	0	0	
.1	.1	0	.4	.1	0	.2	.9	.8	.7	1	.4	
.2	0	.6	.8	.7	.1	0	.8	.5	.6	.4	.1	
.3	.6	.7	.4	.9	.7	.8	.3	.2	0	.2	.6	
.4	0	.7	.8	.7	0	0	.7	.2	.6	.4	.8	
.7	.8	.5	0	0	1	.7	0	0	0	0	0	

↑

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}
$= a_1$	.9	.7	1	.8	1	.8	.7	.5	.3	.5	.6	.3

↑

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	
a_1	.9	.7	1	.8	1	.8	.7	.5	.3	.5	.6	.3	∘

↑

.5
.4
1 ←
.5
.4
0
0
0
0
0
0
1 =1

Рис. 14.5

По стрелкам, отмечающим строки и элементы на рис. 14.5, восстанавливается искомый путь и существенные промежуточные причины.

Предлагаемый метод для восстановления скрытых воздействий в такой области политической деятельности, как подготовка и проведение избирательного процесса, приобретает особый интерес для оценки размеров ассигнований (которые всегда ограничены) с целью оптимизации стратегии затрат при рекламировании тех качеств кандидата, которые желательно выделить. Кроме того, возможность восстановления пути с найденной оценкой инциденции "причины" на "следствие" дает ценную информацию, которая может быть использована для изменения или подтверждения оценок, установленных в матрице непосредственных инциденций.

И, наконец, при восстановлении следствий второго порядка перед специалистами по подготовке избирательных кампаний проясняются определенные причинно-следственные отношения и это может привести к изменению прогнозируемых результатов голосования избирателей.

15. Скрытые воздействия в финансовой области

Общеизвестно, что оценки масс собственности и их балансов на предприятии являются объектом пристального внимания со стороны банков, сберегательных касс, поставщиков, инвесторов и т. п. Использование показателей, относящихся к управлению, рентабельности или биржевым операциям, естественно как для ознакомления со степенью экономической стабильности или финансовой устойчивости, так и для достижения необходимых пропорций между различными составляющими экономических и финансовых структур баланса. Эти показатели позволяют проводить сравнение с другими предприятиями или идеальными стандартами через промежутки времени и тем самым прогнозировать состояние финансово-экономического здоровья предприятия. Такие данные используются разными лицами для принятия решений о желаемой степени сотрудничества или связей. На взаимоотношения между предприятием и внешним окружением влияют не только показатели, связанные с прошлым, но, главным образом, те, что дают оценку будущим ситуациям*. Однако в экономических взаимосвязях и переплетениях, характеризующихся неопределенностью, в большинстве случаев оказывается сложным установить точные или хотя бы вероятностные показатели будущего как проекцию показателей прошлого. С другой стороны, решения финансистов не основываются исключительно на строгих данных, получаемых в результате арифметических действий. Они учитывают, иногда в решающей степени, оценки, содержащие неизбежную долю субъективности. Такие оценки основаны в большей или меньшей степени на причинно-следственных отношениях между представлением о предприятии на основе статистической информации и его имиджем во внешнем мире.

Из различных возможностей классификации элементов, составляющих экономическую и финансовую структуру баланса масс собственности предприятия, выберем следующую :

---

* Различные относительные показатели рассмотрены, например, в [1].

a_1 - прибыль;
a_2 - наличность;
a_3 - реализуемость действительная;
a_4 - реализуемость условная;
a_5 - основной финансовый капитал;
a_6 - основной (материальный, кроме оборудования) капитал;
a_7 - промышленное оборудование;
a_8 - основной нематериальный капитал;
a_9 - краткосрочные обязательства;
a_{10} - среднесрочные и долгосрочные обязательства;
a_{11} - акционерный капитал;
a_{12} - резервный капитал;
a_{13} - запасы;
a_{14} - амортизационный фонд.

Видно, что при такой классификации основной капитал разделяют на составляющие с тем, чтобы отличить инциденцию оборудования от инциденции других элементов, например недвижимости. На финансово-экономический облик предприятия воздействуют внешние и внутренние факторы: кредиты, вклады, накопления и многое другое. Для примера выберем такие факторы, как:
b_1 - кредит у поставщиков;
b_2 - дисконт ценных бумаг;
b_3 - кредиты функционирования;
b_4 - среднесрочные и долгосрочные кредиты;
b_5 - ипотечный кредит;
b_6 - прирост капитала;
b_7 - прирост резервных фондов;
b_8 - прирост котировки акций;
b_9 - платежеспособность по акциям;
b_{10} - стоимость предприятия;
b_{11} - степень ликвидности предприятия;
b_{12} - востребованность предприятия.

Исходя из этих составляющих, можно построить матрицу качественных инциденций, соединяющую каждую из причин с каждым из следствий. В этом случае, как и во многих других, экспертам очень трудно поставить в соответствие каждой паре (a_j, b_k) одно число из интервала $[0,1]$, которое бы оценивало эту инциденцию. Поэтому у экспертов запрашивается мнение о доверительных интервалах из $[0,1]$. Например, для пары, представляющей инциденцию промышленного оборудования, имеющегося на предприятии, на платежеспособность по акциям инциденция может быть выражена с помощью доверительного интервала $[0.4,0.7]$. Может, конечно, получиться, что мнение относительно какой-либо инциденции будет выражено одним числом, например 0.8 для инциденции прибылей на краткосрочные кредиты. В таком случае, как уже оговаривалось ранее, это число может рассматриваться как доверительный интервал $[0.8,0.8]$. В табл. 15.1 с помощью Ф-нечеткой матрицы M представлен вариант оценок, высказанных экспертами. Можно увидеть, что для некоторых инциденций эксперты выразили свое мнение с помощью чисел, а для других с помощью доверительных интервалов.

Т а б л и ц а 15.1

a_1	[.2.3]	[.4,.6]	.8	[.5,.7]	[.1,.3]	1	1	[.6,.8]	[.6,.9]	[.7,.9]	[.1,.2]	0
a_2	[.7,.8]	1	1	[.4,.6]	[.2,.5]	0	[.3,.6]	[.2,.3]	[.5,.7]	[.4,.6]	1	0
a_3	0	1	[.7,.8]	[.4,.5]	[.1,.2]	2	0	[.1,.2]	.1	[.3,.4]	[.8,.9]	0
a_4	1	[.8,.9]	[.8,.9]	[.7,.8]	[0,.1]	[.2,.4]	0	0	[.5,.8]	[.2,.3]	[.6,.8]	0
a_5	[.1.3]	0	[.1,.2]	.6	.3	.2	0	0	[.4,.5]	[.4,.5]	[.4,.5]	0
a_6	0	[.1,.4]	0	[.6,.8]	1	[.8,.9]	0	[.4,.5]	.8	[.6,.9]	.1	0
a_7	0	[.4,.7]	0	1	[.1,.3]	[.6,.8]	0	0	[.4,.7]	[.3,.6]	[.2,.4]	0
a_8	0	0	0	0	0	[.1,.4]	0	[.3,.5]	[.4,.5]	[.7,.8]	0	0
a_9	[0,.4]	.9	[.7,.9]	[.7,.8]	0	.1	[.2,.4]	0	[.7,.8]	[.2,.5]	0	1
a_{10}	[.2,.5]	[.6,.8]	[.7,.9]	1	[.8,.9]	[.7,.9]	[.6,.9]	0	1	[.6,.9]	0	[.8,.9]
a_{11}	[.6,.8]	[.3,.4]	[.3,.4]	[.6,.8]	0	[.7,.8]	0	0	1	[.7,.9]	0	0
a_{12}	[.6,.8]	[.3,.4]	[.3,.4]	[.6,.8]	0	[.2,.4]	[.4,.6]	[.4,.5]	1	[.7,.9]	0	0
a_{13}	[.4,.5]	0	[.1,.4]	[.2,.4]	0	0	[.4,.5]	[.1,.4]	[.4,.6]	[.3,.4]	0	0
a_{14}	0	0	0	0	[.4,.5]	[.3,.6]	0	[.2,.3]	.5	[.4,.6]	0	0

С помощью матрицы $\underset{\sim}{M}$ описаны непосредственные причинно-следственные отношения между величиной (или приращением) масс собственности и внешним имиджем предприятия, отраженным через его финансовые возможности.

Однако такая Ф-нечеткая матрица учитывает только инциденции первого порядка, т. е. те, которые улавливаются или воспринимаются непосредственно. Конечно, существуют и другие инциденции, которые выступают через элементы, влияющие на данные отношения. Таким образом, происходит "накопление" следствий в связи с тем, что одна из первичных "причин" воздействует на тот элемент, который сам может быть причиной, и в итоге конечное следствие может усилиться. Для установления такого рода инциденций каждой из причин на все другие также запрашивалось мнение экспертов, отраженное в еще одной Ф-нечеткой матрице (табл.15.2).

Т а б л и ц а 15.2

a_1	1	[.1,.3]	[.2,.5]	[.1,.2]	.5	[.2,.3]	[.4,.5]	0	[.6,.8]	[.2,.5]	0	1	1	[.6,.9]
a_2	[.1,.2]	1	[.6,.7]	[.5,.7]	.8	[.1,.4]	[.1,.3]	0	[.7,.8]	.1	0	0	0	0
a_3	0	[.6,.9]	1	0	0	0	0	0	.9	.1	0	0	0	0
a_4	[.1,.4]	.9	.9	1	[.2,.4]	.1	0	0	1	[.4,.7]	0	0	[.2,.4]	0
a_5	.8	[.2,.6]	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	[.4,.6]	.6
a_6	0	.1	0	[.2,.4]	0	1	0	0	[.2,.3]	.9	[.7,.8]	.3	[.6,.8]	1
a_7	[.8.1]	[.3,.5]	[.7,.9]	[.7,.9]	0	[.3,.7]	1	0	.2	[.8,.9]	[.6,.8]	[.5,.8]	[.6,.7]	1
a_8	[.3,.6]	.1	0	0	0	0	0	1	0	.1	0	.2	[.2,.4]	1
a_9	.1	[.8,.9]	[.1,.2]	.8	[0,.1]	0	0	0	1	0	0	0	0	0
a_{10}	[.3,.4]	[.4,.6]	0	[.3,.4]	.7	[.4,.6]	[.2,.4]	0	[.1,.4]	1	[.7,.9]	.8	0	0
a_{11}	[.7,.9]	[.5,.6]	.1	[.2,.3]	.5	[.7,.9]	[.6,.8]	.9	.1	[.7,.9]	1	[.6,.7]	0	0
a_{12}	[.7,.9]	[.5,.6]	.1	[.2,.3]	[.7,.8]	[.7,.9]	.1	0	.1	[.7,.9]	.8	1	0	0
a_{13}	1	[.5,.6]	0	.0	0	[.7,.9]	[.7,.9]	0	0	0	0	0	1	0
a_{14}	1	0	0	0	0	[.3,.4]	[.5,.7]	0	0	[.3,.7]	0	0	[.2,.4]	1

В табл. 15.2 отражены мнения экспертов об инциденции каждого из элементов, входящего в экономическую и финансовую структуру баланса масс собственности, на все другие такие же элементы. Получилась квадратная Ф-нечеткая матрица $\underset{\sim}{A}$ размерностью 14×14.

Отметим, что в этой матрице можно выделить инциденции, при оценке которых мнения экспертов существенно расходились. Это касается, например, инциденции амортизационного фонда на среднесрочные и долгосрочные обязательства, оценка которой является достаточно широким доверительным интервалом [0.3, 0.7]. Конечно, следует избегать таких расплывчатых оценок. Там, где эксперты достаточно единодушны в своих мнениях, оценка вообще может становиться одним числом.

Разнообразные косвенные воздействия на оценку непосредственных инциденций в матрице $\underset{\sim}{M}$ могут также оказать инциденции каждого из внешних или внутренних факторов, влияющих на финансово-экономический облик предприятия, на все другие такие же факторы. В табл. 15.3 в виде матрицы $\underset{\sim}{B}$ размерностью 12×12 отражены мнения экспертов об этих инциденциях.

Т а б л и ц а 15.3

b_1	1	[.4,.6]	[.5,.6]	0	0	0	0	0	[.2,.5]	.7	0	.9
b_2	[.6,.8]	1	[.1,.2]	.1	0	[.2,.3]	0	0	[.2,.5]	.7	0	.9
b_3	[.2,.5]	0	1	0	0	0	0	0	[.2,.5]	[.2,.3]	0	.9
b_4	0	[.5,.7]	[.5,.7]	1	0	[.6,.8]	.7	0	[.4,.6]	[.5,.8]	0	[.6,.7]
b_5	0	0	0	[.1,.3]	1	[.6,.8]	.7	0	[.4,.6]	[.5,.8]	0	[.3,.6]
b_6	.8	[.7,.8]	[.4,.6]	[.5,.8]	0	1	0	1	1	1	0	0
b_7	[.6,.8]	[.6,.7]	[.6,.7]	[.7,.8]	0	[.2,.4]	1	.9	.8	[.8,.9]	.2	0
b_8	0	0	0	0	0	0	0	1	[.2,.4]	.5	0	0
b_9	.9	[.7,.9]	.9	.9	[.3,.5]	1	0	[.7.8]	1	[.6,.9]	0	0
b_{10}	[.2,.4]	[.2,.4]	[.2,.4]	.1	[.5,.6]	[.1,.2]	0	[.8,.9]	.2	1	0	0
b_{11}	.9	[.8,.9]	.9	[.7,.8]	[.2,.4]	[.5,.6]	[.7,.9]	[.4,.6]	[.9,1]	[.6,.7]	1	0
b_{12}	[.8,.9]	[.7,.8]	.9	.9	[.6,.8]	[.7,.8]	[.5,.7]	[.2,.5]	[.8,.9]	[.5,.7]	.3	1

Надо иметь ввиду, что оценки, даваемые экспертами этим отношениям, сильно зависят от экономической политики каждого предприятия, преследующего свои цели, а также от приоритета одних целей над другими. Оценка будет различной в определенных отношениях в зависимости от того, существует ли стремление к краткосрочной или долгосрочной рентабельности или предпочтение отдается финансовой стабильности, когда необходимость быстрого получения прибылей уходит на второй план. Так, например, инциденция степени ликвидности предприятия на прирост резервных фондов в случае, если компания желает распределить большую часть полученных прибылей, будет оцениваться иначе, чем при стремлении накопить прибыли в качестве резервов. Влияние вариаций на востребованность предприятия на прирост капитала также зависит от целей компании и политики, направленной на их достижение. Таким образом, даже не имея в виду субъективность, присущую исследованиям неопределенностей, следует учитывать разницу в оценках одних и тех же экспертов для различных компаний и различных экономических систем. Этот факт следует принимать во внимание при изучении оценок, содержащихся в представленных матрицах.

После получения Ф-нечетких матриц перейдем с помощью свертки maxmin к новой матрице $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}$, содержащей накопленные косвенные воздействия каждого элемента структуры баланса масс собственности на себя и на всевозможные другие элементы и, далее, воздействия всех этих элементов на всевозможные факторы, определяющие финансово-экономический облик предприятия (табл. 15.4).

Например, если рассмотреть инциденцию условной реализуемости капитала на ипотечный кредит, то можно заметить, что ее прямое действие невелико, поскольку увеличение запасов готовой продукции не влечет за собой больших возможностей получения ипотечных кредитов (эксперты оценили это отношение в матрице $\underset{\sim}{M}$ доверительным интервалом [0,.1]. В матрице в соответствующей клетке будет уже оценка [.4,.7], полученная из следующей цепочки:

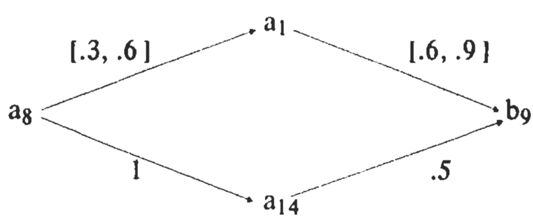
$$a_4 \xrightarrow{[.4,.7]} b_4 \xrightarrow{[.8,.9]} b_5 .$$

Понятно, что существует определенное влияние условно реализуемого капитала на краткосрочные и долгосрочные обязательства. Действительно, приобретение сырья и полуфабрикатов не всегда осуществляется через краткосрочные займы, иногда прибегают к более продолжительным срокам кредитов. Но наличие среднесрочных и долгосрочных займов может привести к тому, что приходится прибегнуть к ипотечным кредитам. Эксперты оценили это причинно-следственное отношение как значительное оценкой [.8,.9]. На наш взгляд, решающее воздействие на рост ипотечных кредитов оказывают также и такие факторы, как приобретение недвижимости, включаемой в основной материальный капитал (кроме оборудования), хотя мы не подвергаем сомнению и полностью учитываем мнение экспертов. Доверительные интервалы, полученные в матрице $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}$ сверткой maxmin, не всегда равны одному из интервалов сворачиваемых матриц. В некоторых случаях левая граница какого-либо интервала может быть взята из одной клетки, а правая граница из другой. Действительно, в клетке (a_8, b_9) матрицы $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}$ вычислен интервал [.5,.6], которого нет ни в строке a_8 матрицы $\underset{\sim}{A}$, ни в столбце b_9 матрицы $\underset{\sim}{M}$. Этот интервал появился как результат выбора в качестве левой границы 0.5 из клетки $(a_{14}, в_9)$ матрицы

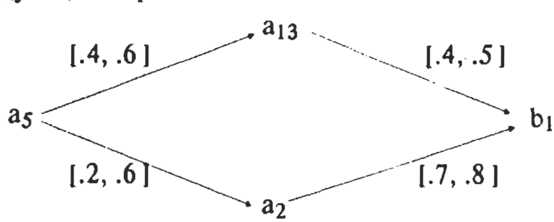
Т а б л и ц а 15.4

a_1	[.6,.8]	[.6,.8]	.8	[.6,.8]	[.4,.5]	1	1	[.6,.8]	1	[.7,.9]	[.4,.5]	[.6,.8]
a_2	[.7,.8]	1	1	[.7,.8]	[.3,.5]	[.2,.4]	[.3,.6]	[.2,.4]	[.7,.8]	[.4,.6]	1	[.7,.8]
a_3	[.6,.8]	1	[.7,.9]	[.7,.8]	[.2,.5]	.2	[.3,.6]	[.2,.3]	[.7,.8]	[.4,.6]	[.8,.9]	.9
a_4	1	.9	.9	[.7,.8]	[.4,.7]	[.4,.7]	[.4,.7]	[.2,.4]	[.7,.8]	[.4,.7]	.9	1
a_5	[.4,.6]	[.4,.6]	.8	[.6,.7]	[.4,.5]	.8	.8	[.6,.8]	[.6,.8]	[.7,.8]	[.4,.6]	0
a_6	[.6,.8]	[.6,.8]	[.7,.9]	.9	1	[.8,.9]	[.6,.9]	[.4,.5]	.9	[.7,.9]	[.2,.4]	[.8,.9]
a_7	[.7,.9]	[.7,.9]	[.8,.9]	1	[.8,.9]	[.8,.1]	[.8,.1]	[.6,.8]	[.8,.1]	[.7,.9]	[.7,.9]	[.8,.9]
a_8	[.2,.4]	[.3,.6]	[.3,.6]	[.3,.6]	[.4,.5]	[.3,.6]	[.3,.6]	[.3,.6]	[.5,.6]	[.7,.8]	[.1,.2]	.1
a_9	.8	.9	[.8,.9]	[.7,.8]	[.2,.5]	[.2,.4]	[.3,.6]	[.2,.3]	[.7,.8]	[.4,.6]	[.8,.9]	1
a_{10}	[.6,.8]	[.6,.8]	[.7,.9]	1	[.8,.9]	[.7,.9]	[.6,.9]	[.4,.5]	1	[.7,.9]	[.4,.6]	[.8,.9]
a_{11}	[.6,.8]	[.6,.8]	[.7,.9]	[.7,.9]	[.7,.9]	[.7,.9]	[.7,.9]	[.6,.8]	1	[.7,.9]	[.5,.6]	[.7,.9]
a_{12}	[.6,.8]	[.6,.8]	[.7,.9]	[.7,.9]	[.7,.9]	[.7,.9]	[.7,.9]	[.6,.8]	1	[.7,.9]	[.5,.6]	[.7,.9]
a_{13}	[.5,.6]	[.5,.7]	.8	[.7,.9]	[.7,.9]	1	1	[.6,.8]	[.7,.9]	[.7,.9]	[.5,.6]	0
a_{14}	[.2,.5]	[.4,.7]	.8	[.5,.7]	[.4,.7]	1	1	[.6,.8]	[.6,.9]	[.7,.9]	[.2,.4]	[.3,.7]

$\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}$ и верхней границы 0.6 из клетки (a_8, a_1) матрицы A. Графически это накопленное отношение может быть представлено следующим образом:



Накопленные воздействия на пути $a_8 \to a_1 \to b_9$ оцениваются интервалом [.3,.6], а на пути $a_8 \to a_{14} \to b_9$ – интервалом [.5,.5], поэтому максимумы левых и правых границ интервалов приводят к оценке [.5,.6]. Смысл этого результата проясняется, если понимать левые и правые границы доверительного интервала как оценки, выше или ниже которых не может быть оценено рассматриваемое отношение. Аналогично поскольку в нашем примере инциденция основного нематериального капитала на прибыль составляет не менее 0.3, а инциденция прибыли на платежеспособность по акциям — не менее 0.6, то инциденция основного нематериального капитала на платежеспособность по акциям через прибыль будет не менее 0.3. Далее, поскольку инциденции основного нематериального капитала на амортизационный фонд равна 1, а инциденция амортизационного фонда на платежеспособность по акциям не ниже 0.5, то инциденция основного нематериального капитала на платежеспособность по акциям через амортизационный фонд не ниже 0.5. Эту оценку можно рассматривать в качестве левой границы интервала в клетке (a_8,b_9) в матрице $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}$. Подобное рассуждение можно провести и для правой верхней границы, для которой будет выбрана оценка 0.6. Таким образом, сформируется интервал [0.5,0.6]. Еще одной клеткой, где доверительный интервал матрицы $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}$ сформирован из границ, принадлежащих двум разным путям, является клетка (a_5,b_1), в которой левая граница соответствует отношению $a_5 \to a_{13} \to b_1$ с оценкой 0.4, а правая граница — отношению $a_5 \to a_2 \to b_1$ с оценкой 0.6. Графически эти соответствия могут быть представлены следующим образом:



С другой стороны, можно заметить, что на этом этапе оценки накопленных следствий первого и второго порядков появляются два отношения, а именно: (a_5,b_{12}) - инциденция основного капитала на востребованность предприятия и (a_{13},b_{12}) - инциденция запасов на востребованность предприятия, для которых ни непосредственная, ни косвенная инциденции еще не проявились и потому в этих клетках матрицы $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}$ стоит оценка 0.

Рассуждая подобным образом, перейдем к свертке maxmin матриц $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}$ и $\underset{\sim}{B}$, т. е. вычислению новой матрицы $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}$, в которой в виде доверительных интервалов проявляются оценки накопленных инциденций первого и второго порядков (табл. 15.5).

Таблица 15.5

a_1	.9	[.7,.9]	.9	.9	[.6,.8]	1	1	1	1	1	[.4,.5]	.8
a_2	.9	1	1	[.7,.8]	[.6,.8]	[.7,.8]	[.7,.9]	[.7,.8]	[.9,1]	[.7,.8]	1	.9
a_3	[.8,.9]	1	.9	.9	[.6,.8]	[.7,.8]	[.7,.9]	[.7,.8]	[.8,.9]	[.7,.8]	[.8,.9]	.9
a_4	1	.9	.9	.9	[.6,.8]	[.7,.8]	[.7,.9]	[.7,.8]	.9	[.7,.8]	.9	1
a_5	.8	[.7,.8]	.8	[.7,.8]	[.5,.6]	.8	.8	.8	.8	.8	[.4,.6]	.8
a_6	.9	[.7,.9]	.9	.9	1	.9	[.7,.9]	[.8,.9]	.9	[.8,.9]	[.3,.4]	[.8,.9]
a_7	[.8,.9]	[.7,.9]	[.8,.9]	1	[.8,.9]	[.8,1]	[.8,1]	[.8,1]	[.8,1]	[.8,1]	[.7,.9]	[.8,.9]
a_8	[.5,.6]	[.5,.6]	[.5,.6]	[.5,.6]	[.5,.6]	[.5,.6]	[.4,.6]	[.7,.8]	[.5,.6]	[.7,.8]	.2	[.3,.6]
a_9	[.8,.9]	.9	.9	.9	[.6,.8]	[.7,.8]	[.7,.9]	[.7,.8]	[.8,.9]	[.7,.8]	[.8,.9]	1
a_{10}	.9	[.7,.9]	.9	1	[.8,.9]	1	[.7,.9]	[.7,.9]	1	[.7,.9]	[.4,.6]	[.8,.9]
a_{11}	.9	[.7,.9]	.9	.9	[.7,.9]	1	[.7,.9]	[.7,.9]	1	[.7,.9]	[.5,.6]	[.7,.9]
a_{12}	.9	[.7,.9]	.9	.9	[.7,.9]	1	[.7,.9]	[.7,.9]	1	[.7,.9]	[.5,.6]	[.7,.9]
a_{13}	[.8,.9]	[.7,.9]	[.8,.9]	[.7,.9]	[.7,.9]	1	1	1	1	1	[.5,.6]	.8
a_{14}	[.8,.9]	[.7,.9]	[.8,.9]	[.7,.9]	[.5,.7]	1	1	1	1	1	[.3,.4]	.8

Первый вывод, который можно сделать, относится к тому, что объем получаемой прибыли оказывает огромное влияние на имидж предприятия в целом. Об этом свидетельствует первая строка матрицы $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}$, практически состоящая из высоких оценок, за исключением клетки (a_1, b_{11}) — инциденции прибыли на степень ликвидности предприятия, в которой появляется доверительный интервал [.4,.5]. Эта накопленная оценка получена с помощью следующей цепочки :

$$a_1 \xrightarrow{[.5,.5]} a_5 \xrightarrow{[.4,.5]} b_{11} \xrightarrow{[1,1]} b_{11},$$

для которой $.5 \wedge [.4,.5] \wedge 1 = [.4,.5]$. Существует и другой путь, через действительную реализуемость, на котором также получается правая граница интервала, равная 0,5. Таким образом, оказалось, что полученные оценки экспертов и вычисленные результаты совпадают с интуитивными предположениями предпринимателей, для которых хорошая прибыль является основным симптомом финансово-экономического здоровья предприятия.

Как видно из строк 2,3,4 матрицы $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}$, столь же важными для имиджа предприятия являются соответственно величины масс наличности, действительной реализуемости и условной реализуемости без каких-либо существенных исключений. Поскольку основной капитал поделен на четыре группы, можно проверить инциденцию каждой из них на факторы, составляющие финансово-экономический имидж. Более того, можно через оценку уменьшения энтропии установить степени большей или меньшей интенсивности в причинно-следственных отношениях. Это производится следующим образом. Вычислим усредненные значения оценок для строк матрицы $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}$. Например, для строки 5 "Основной финансовый капитал" $v_5 = 8.95 \;/\; 12 = 0.745$, для строки 6 "Основной материальный (кроме оборудования) капитал" $v_6 = 10 \;/\; 12 = 0.745$, для строки 7 " Промышленное оборудование" $v_7 = 10.50 \;/\; 12 = 0.875$, для строки 8 " Основной нематериальный капитал " $v_8 = 6.50 \;/\; 12 = 0.541$.

Сравнение величин v_5, v_6, v_7, v_8 позволяет установить степень важности накопленных инциденций для каждой из масс собственности на имидж предприятия. Так как $v_7 > v_6 > v_5 > v_8$, то будет установлено следующее упорядочение:

1) промышленное оборудование;
2) основной материальный (кроме оборудования) капитал;
3) основной финансовый капитал;
4) основной нематериальный капитал.

Такой вывод может считаться правильным, если иметь в виду принятую гипотезу о том, что каждое из понятий, рассматриваемых в качестве "следствий", имеет собственный вес, образуя то, что мы назвали финансово-экономическим имиджем компании. С другой стороны, такое упорядочение не удивительно, поскольку будущее любого (особенно промышленного) предприятия значительно больше связано с технологией, чем с недвижимостью, а тем более с акциями, которыми оно владеет, или больше, чем с основным нематериальным капиталом.

Что касается инциденций займов на имидж предприятия, то они существенны как для краткосрочных обязательств, так и для среднесрочных и долгосрочных займов с небольшим преимуществом для последних, если исключить фактор ликвидности предприятия, на который явно оказывают большее влияние краткосрочные обязательства. Интересно констатировать также и то, что инциденция акционерного капитала на каждый из факторов, формирующих имидж предприятия в матрице $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}$, представляющей накопленные следствия первого и второго порядков, такая же, как и инциденция резервного капитала, в то время как в матрице $\underset{\sim}{M}$ следствий первого порядка этого не происходит. Именно такой факт позволяет утверждать, что эти две массы собственности имеют одинаковую важность для финансово-экономической оценки предприятия. Отметим также, что в отличие от матрицы $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M}$ в матрице $\underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}$ в клетках (a_5, b_{12}) и (a_{13}, b_{12})

появились ненулевые (и достаточно существенные) оценки, равные 0.8. Для основного финансового капитала такая оценка возникла вследствие влияния прибыли и других кредитов функционирования в соответствии с цепочкой

$$a_5 \xrightarrow{0.8} a_1 \xrightarrow{0.8} b_3 \xrightarrow{0.9} b_{12},$$

для которой $0.8 \wedge 0.8 \wedge 0.9 = 0.8$.

Для запасов такая оценка возникла также вследствие влияния прибыли и других кредитов функционирования по цепочке

$$a_{13} \xrightarrow{1} a_1 \xrightarrow{0.8} b_3 \xrightarrow{0.9} b_{12},$$

для которой $1 \wedge 0.8 \wedge 0.9 = 0.8$.

Конечно, самым значительным выводом, который можно извлечь, анализируя матрицу, выражающую накопленные следствия первого и второго порядков, является необходимость учета существенных инциденций, имеющихся между каждой из масс собственности в экономической либо финансовой структуре баланса и различными факторами, определяющими имидж или оценку, которую получает предприятие от связанных с ней представителей финансово-экономических кругов. Даже тогда, когда прямые отношения или отношения первого порядка явно проявляются у экспертов через связи, которые все же существуют между причинами и ими же самими и между следствиями и ими же самими, они в конечном счете возникают при накоплении причинно-следственных отношений первого и второго порядков. Эти финансовые взаимосвязи известны специалистам на деле, но не всегда они проявляются с достаточной четкостью и в большинстве случаев даже не становятся явными. Предложенная модель помогает достичь именно этого.

Рассмотрим, наконец, последний этап нашей схемы, заключающейся в восстановлении скрытых воздействий в матрице $\underset{\sim}{M}$ инциденций первого порядка, разработанной экспертами. Для этого, как указывалось в § 7, оценим каким-то образом расстояние между каждым элементом матрицы и соответствующим элементом матрицы $\underset{\sim}{M}^* = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}$. В качестве расстояния возьмем усредненные разности между левыми и правыми концами интервалов. Так, если интервал матрицы M равен $[m_1, m_2]$ и соответствующий ему интервал в матрице M^* равен $[m_1^*, m_2^*]$, то расстояние для этого элемента будет $d = ((m_1^* - m_1) + (m_2^* - m_2))/2$ из-за того, что, как уже отмечалось, разности в формуле для вычисления расстояния неотрицательны.

Для нашего примера матрица $d_{\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{M}^*}$ представлена табл. 15.6. Ее элементы показывают степень неучтенности (забывания) промежуточных инциденций в каждом из причинно-следственных отношений.

Таблица 15.6

a_1	0.65	0.30	0.10	0.30	0.50	0	0	0.30	0.25	0.20	0.30	0.80
a_2	0.15	0	0	0.25	0.35	0.75	0.35	0.50	0.35	0.25	0	0.90
a_3	0.85	0	0.15	0.45	0.55	0.55	0.80	0.60	0.75	0.40	0	0.90
a_4	0	0.05	0.05	0.15	0.65	0.45	0.80	0.75	0.25	0.50	0.20	1
a_5	0.60	0.75	0.65	0.15	0.25	0.60	0.80	0.80	0.35	0.35	0.05	0.80
a_6	0.90	0.55	0.90	0.20	0	0.05	0.80	0.40	0.10	0.10	0.25	0.85
a_7	0.85	0.25	0.85	0	0.65	0.20	0.90	0.90	0.35	0.45	0.50	0.85
a_8	0.55	0.55	0.55	0.55	0.55	0.30	0.50	0.35	0.10	0	0.20	0.45
a_9	0.65	0	0.10	0.15	0.70	0.65	0.50	0.75	0.10	0.40	0.85	0
a_{10}	0.55	0.10	0.10	0	0	0.20	0.05	0.80	0	0.05	0.50	0
a_{11}	0.20	0.45	0.55	0.20	0.80	0.25	0.80	0.80	0	0	0.55	0.80
a_{12}	0.20	0.45	0.55	0.20	0.80	0.70	0.30	0.35	0	0	0.55	0.80
a_{13}	0.40	0.80	0.60	0.50	0.80	1	0.55	0.75	0.50	0.65	0.55	0.80
a_{14}	0.85	0.80	0.85	0.80	0.15	0.55	1	0.75	0.50	0.50	0.35	0.80

Даже беглый взгляд на матрицу d_{MM}^* позволяет выделить три причинно-следственных отношения, которые эксперты сочли несуществующими в своих оценках инциденций, представленных в матрице. Речь идет о следующих инциденциях : a_4 (Реализуемость условная) $\rightarrow b_{12}$ (Востребованность предприятия); a_{13} (Запасы) $\rightarrow b_6$ (Прирост капитала); a_{14} (Амортизационный фонд) $\rightarrow b_7$ (Прирост резервных фондов).

Интуитивно трудно определить цепочки рассуждений для установления указанных связей, поэтому, как и ранее, воспользуемся графами. Сначала рассмотрим инциденции условной реализуемости капитала на востребованность предприятия. Среди возможных цепочек отношений только цепочка вида

$$a_4 \xrightarrow{1} a_9 \xrightarrow{1} b_{12} \xrightarrow{1} b_{12}$$

дает накопленное следствие, оцениваемое в 1. Все остальные цепочки содержат менее сильные следствия первого и второго порядков. Хотя бы частично этот результат можно проверить с помощью графа, изображенного на рис.15.1, на котором для большей ясности показаны только пути, исходящие из следствия a_9.

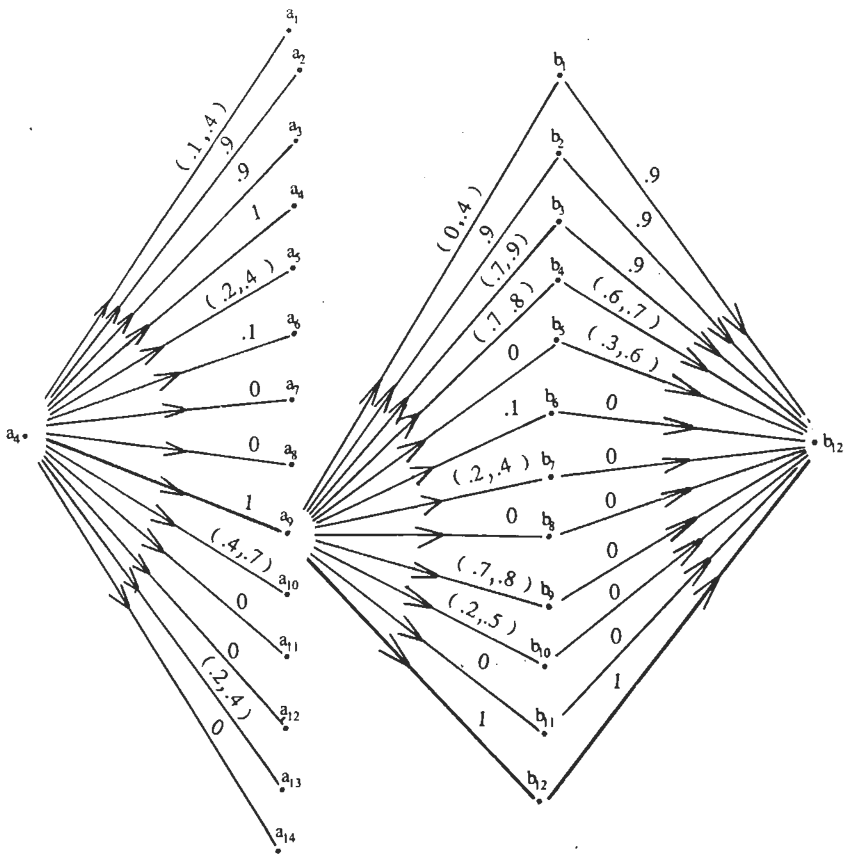


Рис. 15.1

Простота этой цепочки отношений вытекает практически из любого поясняющего комментария. Если непосредственное воздействие условно реализуемого капитала на востребованность предприятия было по мнению экспертов нулевым, то кажется очевидной полная инциденция закупки сырья и полуфабрикатов, например, на увеличение поступлений на счет поставщиков, которое, в свою очередь, подразумевает востребованность (краткосрочную) предприятия.

Рассмотрим теперь очередные, не учтенные или забытые экспертами воздействия при оценке инциденции запасов на прирост капитала. Среди возможных цепочек отношений цепочка вида

$$a_{13} \xrightarrow{1} a_1 \xrightarrow{1} b_6 \xrightarrow{1} b_6$$

приводит к максимальной оценке, равной 1. Снова этот результат можно проверить на графе (рис. 15.2), на котором для большей ясности показаны только пути, исходящие из следствия a_1.

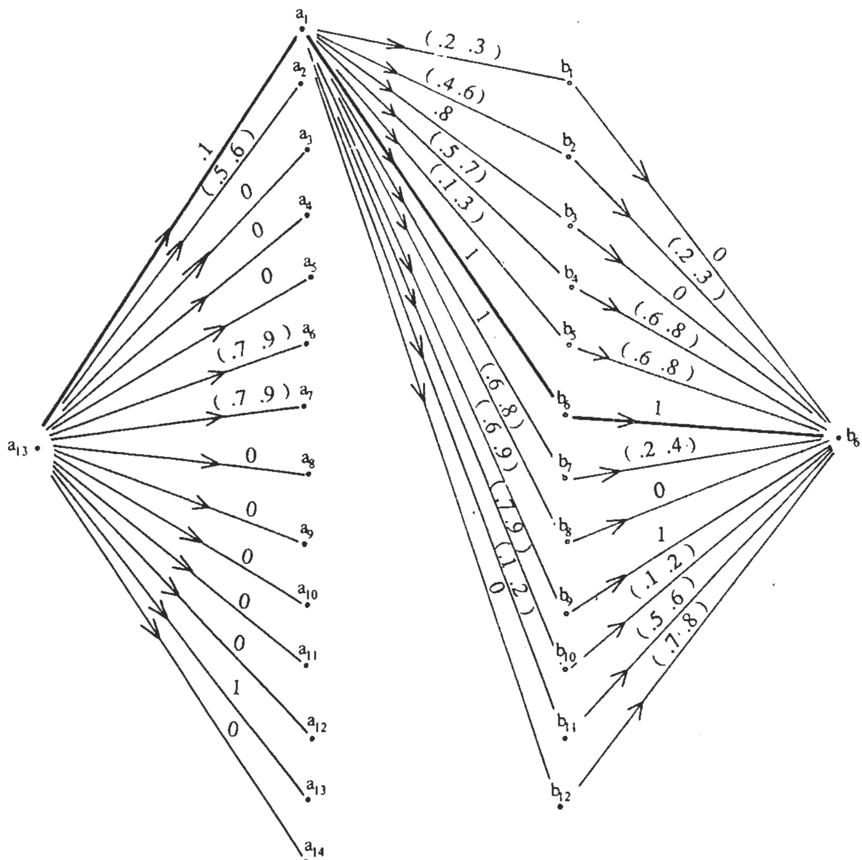


Рис. 15.2

Обоснованность оценки инциденции a_{14} на b_7, равной 1, становится понятной, если принять во внимание, что эксперты рассматривали полное причинно-следственное отношение между величиной осуществленных запасов и получением прибыли за финансовый год. Вероятно, следовало бы придать определенную оттеночность значению, которое эксперты дали понятию запасов. Действительно, кажется очевидным, что наличие большой массы запасов облегчает получение прибыли, однако абсолютная инциденция реально возникает тогда, когда запасы относятся к тому же финансовому году, что и прибыль. Одновременность учета обоих обстоятельств могла привести к тому, что оценка приняла бы характер сближения. С другой стороны, нетрудно допустить полную инциденцию прибыли на прирост капитала. Неудовлетворительные прибыли могут привести к приросту уставного капитала предприятия с тем, чтобы улучшить с помощью новых вкладов нежелательный прогноз. Высокие прибыли могут заставить акционеров повысить активность и укрепить предприятие в случае достижения высокой рентабельности.

Наконец, последнее не учтенное или забытое экспертами следствие с максимальной инциденцией касается влияния амортизационного фонда на прирост резервных фондов. Среди возможных цепочек отношений цепочка вида $a_{14} \xrightarrow{1} a_1 \xrightarrow{1} b_7 \xrightarrow{1} b_7$ приводит к максимальной оценке, равной 1. Этот результат проверяется на графе (рис. 15.3), на котором для большей ясности показаны только пути, исходящие из следствия a_1.

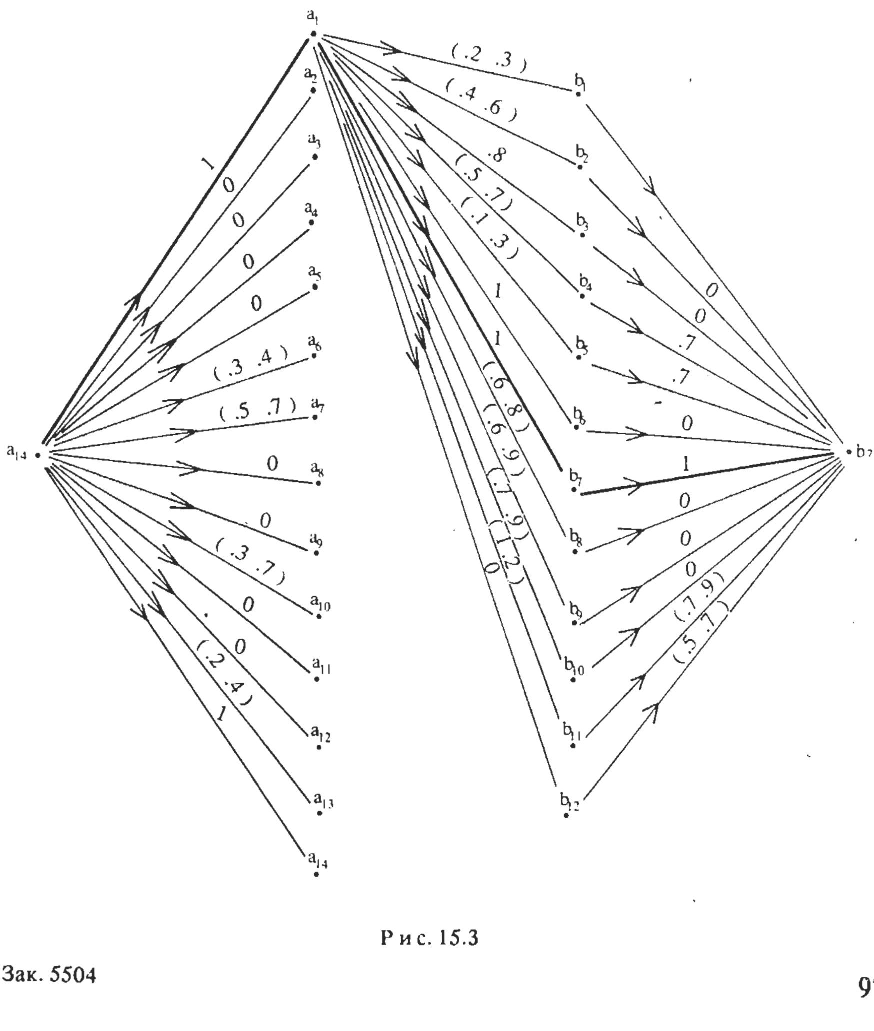


Рис. 15.3

Для понимания смысла высокой оценки инциденции амортизационного фонда на прирост резервных фондов надо принять во внимание оценку, которую эксперты задали отношению "амортизационный фонд - прибыль". Правильная амортизационная политика позволяет осуществить адекватное обновление промышленного оборудования, особенно в период быстрого устаревания станков и оборудования в связи со все ускоряющимся техническим прогрессом.

Оказывается очевидным, что результаты финансового года являются основной и необходимой причиной для создания и расширения резервных фондов.

Подобный анализ скрытых воздействий можно было бы продолжать, например, для расстояний, равных 0.9, в матрице $d_{\underset{\sim}{M}\underset{\sim}{M}}{}^*$, которые относятся к парам "наличность - востребованность предприятия", "промышленное оборудование - прирост резервных фондов" и "основной материальный (кроме оборудования) капитал - кредит у поставщиков" и др. Однако мы полагаем, что анализ, проведенный выше, достаточен для обоснования эффективности, которая основана на том, что эксперты могут выразить свои субъективные представления об экономическом объекте в виде доверительных интервалов и эти данные позволяют с помощью несложных матричных операций оценить разнообразные косвенные воздействия как в количественной, так и в качественной форме.

16. Скрытые воздействия при определении коммерческого имиджа предприятия

Коммерческий престиж предприятия зависит от разнообразных и разнородных впечатлений, которые получают возможные потребители от предлагаемой продукции. Улучшение коммерческого имиджа предприятия проводится за счет усиления входящих в него факторов. Не претендуя на исчерпывающее перечисление и имея в виду цель данной книги, выделим некоторые, на наш взгляд, наиболее важные для коммерческого имиджа предприятия факторы:

b_1 - рост числа продаж (в физических единицах);
b_2 - изменение продажных цен;
b_3 - конкурентоспособность;
b_4 - изменение рыночных квот;
b_5 - качество продукции;
b_6 - территориальное распределение;
b_7 - надежность поставок.

Средства для влияния на эти факторы разнообразны и затрагивают практически все подсистемы управления. Среди этих средств назовем следующие:

a_1 - модернизация производственного оборудования;
a_2 - расширение ассортимента и объема товарных запасов;
a_3 - повышение квалификации работающих;
a_4 - выпуск новых товаров и (или) услуг;

a_5 - улучшение внешнего вида товаров;

a_6 - создание или улучшение работы исследовательских и контрольных лабораторий;

a_7 - улучшение работы транспортных средств;

a_8 - расширение торговой сети;

a_9 - мероприятия по рекламе.

Конечно, данный список может быть расширен и при этом можно выделить средства, которые будут иметь значительно отличающиеся от других оценок инциденции на один или несколько факторов. Однако мы считаем его достаточным для иллюстрации возможностей предложенной модели.

Перейдем к установлению причинно-следственных отношений между каждым из средств и факторами, составляющими имидж предприятия, с целью определения прямых инциденций и инциденций второго порядка с последующим восстановлением скрытых воздействий. Модели, которые мы применяли как для планирования избирательной кампании, так и в финансовой области, основывались на субъективном мнении эксперта или согласованном мнении нескольких экспертов. Такое согласование не всегда оказывается легкой задачей. В схеме, которая приводится ниже, эксперты выражают свое мнение по отдельности, причем общение между ними для согласования мнений не допускается. Разумеется, хотелось бы располагать достаточно большим числом специалистов, которые бы предоставили достаточную информацию для установления достоверных вероятностей. Однако на практике это недостижимо. Кроме того, нам хотелось бы описать возможности модели максимально просто, не уменьшая, конечно, общности. Поэтому мы описываем метод обработки мнений точно десяти экспертов, тем более, что этот прием уже использован в первой главе.

Итак, пусть 10 экспертов оценили по одиннадцатиуровневой шкале $\{0, 0.1, \ldots, 0.9, 1\}$ инциденции средств изменения качества производства на факторы, характеризующие имидж предприятия, в виде десяти матриц $\underset{\sim}{M}^{(j)}$, $j=1,2,\ldots,10$:

$\underset{\sim}{M}^{(1)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.9	.3	.1	.4	.9	0	0
a_2	.8	.2	.3	.7	0	.6	.8
a_3	.7	.1	.4	.3	.3	.4	.9
a_4	1	0	.8	.7	0	.6	0
a_5	.5	.6	.3	.2	0	.4	0
a_6	.1	.3	.2	.2	1	0	0
a_7	.8	0	.6	.5	0	1	.9
a_8	1	.2	.7	.6	0	1	0
a_9	1	.6	.7	.7	0	.1	0

$\underset{\sim}{M}^{(2)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.7	1	0	.1	1	0	0
a_2	.6	0	.3	.2	.2	.1	.6
a_3	.8	.2	.4	.2	.6	.1	.7
a_4	1	.2	1	1	0	0	0
a_5	.6	.8	.2	.2	0	0	0
a_6	.2	.4	0	0	1	0	0
a_7	.3	0	.1	.1	0	1	1
a_8	.8	.2	1	.8	0	1	.2
a_9	.9	.3	.5	.4	0	0	0

$\underset{\sim}{M}^{(3)}=$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.4	.5	.3	.2	1	0	.1
a_2	.4	.6	.4	.4	.5	.5	1
a_3	.6	.6	.2	.3	.8	.2	1
a_4	1	.2	.8	.6	.1	.1	0
a_5	.5	.6	.3	.2	0	0	0
a_6	.2	.4	.4	.2	1	0	.3
a_7	.6	0	.2	.1	0	1	.8
a_8	.8	.2	.7	.6	0	1	.4
a_9	.9	.7	.8	.9	0	.6	0

$\underset{\sim}{M}^{(4)}=$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.5	.7	.8	.5	1	0	0
a_2	.6	.1	.7	.3	.3	.1	.8
a_3	.7	.2	.6	.5	.8	0	1
a_4	1	.1	.8	.8	0	.4	0
a_5	.6	.6	.5	.2	0	.1	0
a_6	.3	.6	.5	.5	1	0	.3
a_7	.7	.1	.3	.1	0	.9	.6
a_8	1	.3	1	.8	0	1	0
a_9	1	.7	.9	.8	0	.6	0

$\underset{\sim}{M}^{(5)}=$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.4	.5	.3	.2	1	0	.3
a_2	.6	.5	.6	.4	.5	0	.9
a_3	.9	.6	.7	.6	.8	.4	1
a_4	1	0	.8	.8	.1	.3	0
a_5	.6	.8	.5	.5	0	0	0
a_6	.1	.7	.6	.4	1	0	0
a_7	.8	.2	.7	.3	0	1	.9
a_8	1	.3	.8	.7	0	1	.6
a_9	1	.8	.8	.8	0	.6	0

$\underset{\sim}{M}^{(6)}=$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.5	.8	.7	.4	.9	0	0
a_2	.6	.7	.2	.2	.4	0	.9
a_3	.8	.8	.9	.8	.8	.5	.7
a_4	1	.1	.7	.5	0	0	0
a_5	.5	.7	.3	.1	0	0	0
a_6	.2	.9	.3	.3	.9	0	0
a_7	.7	.4	.5	.3	0	.8	.8
a_8	1	.6	1	.8	0	1	.9
a_9	1	.4	.9	.9	0	.6	0

$\underset{\sim}{M}^{(7)}=$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.3	.9	.8	.3	.9	.1	0
a_2	.4	.6	.5	.1	.4	.3	.8
a_3	.9	.6	.8	.6	.9	.8	.9
a_4	1	.2	.7	.7	.1	.6	0
a_5	.6	.7	.5	.4	0	0	0
a_6	.3	.7	.6	.1	1	0	0
a_7	.4	.3	.6	.3	0	1	.6
a_8	1	.3	1	.6	0	1	.8
a_9	1	.6	.7	.7	0	.4	0

$\underset{\sim}{M}^{(8)}=$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.3	.7	.4	.2	1	0	0
a_2	.4	.6	.3	.1	.5	.2	.9
a_3	.8	.7	.9	.7	1	.8	1
a_4	1	.2	1	.8	0	.1	0
a_5	.9	.8	.6	.6	0	.1	0
a_6	.2	.8	.1	.1	.9	0	0
a_7	.3	.2	.2	0	0	.7	.7
a_8	.9	0	1	.6	0	1	.6
a_9	.8	.8	.9	.8	0	.2	0

$$\underset{\sim}{M}^{(9)}= \begin{array}{c} \\ a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6\\a_7\\a_8\\a_9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline .5 & .7 & .3 & .3 & .8 & 0 & .4 \\ \hline .5 & .4 & .6 & .2 & .5 & .6 & .6 \\ \hline .6 & .4 & .7 & .6 & .8 & .1 & .8 \\ \hline .9 & .2 & .9 & .9 & .1 & 0 & 0 \\ \hline .6 & .9 & .7 & .6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline .2 & .8 & .1 & 0 & .9 & 0 & 0 \\ \hline .4 & .1 & .1 & .1 & 0 & .8 & .7 \\ \hline 1 & 0 & 1 & .7 & 0 & 1 & .1 \\ \hline 1 & .8 & .9 & .9 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array} \qquad \underset{\sim}{M}^{(10)}= \begin{array}{c} \\ a_1\\a_2\\a_3\\a_4\\a_5\\a_6\\a_7\\a_8\\a_9 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 & b_7 \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline .7 & .8 & .6 & .1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline .5 & .7 & .8 & .4 & .5 & .6 & .5 \\ \hline .8 & .8 & .9 & .3 & .8 & 0 & 1 \\ \hline 1 & .1 & .8 & .7 & 0 & .2 & 0 \\ \hline .6 & .8 & .6 & .5 & 0 & 0 & 0 \\ \hline .4 & .6 & .2 & .1 & 1 & .1 & 0 \\ \hline .5 & .2 & .5 & .2 & 0 & 1 & .8 \\ \hline 1 & 0 & .9 & .7 & 0 & 1 & .9 \\ \hline .7 & .8 & .7 & .9 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

Таким образом получено 10 матриц оценок, представленных экспертами из разных стран и разных научных кругов. Даже беглый взгляд на эти матрицы позволяет убедиться в том, что существует абсолютное совпадение оценок некоторых инциденций (например, (a_1,b_6), (a_4,b_7), ...), а в других расхождения мнений значительны (например, для (a_3,b_6), (a_8,b_7), ...). Основываясь на матрицах $\underset{\sim}{M}^{(1)}$, ..., $\underset{\sim}{M}^{(10)}$, соберем статистику встречаемости каждой оценки для каждой пары (a_i,b_j), где $i=1,2,...,9$; $j=1,2,...,7$ (табл.16.1). Так, например, оценка 0.5 для инциденции a_1 на b_1 в указанных матрицах встречается три раза. Это и отмечается в клетке (a_1,b_1) для оценки (уровня) 0.5.

Статистика из табл.16.1 в расчете на количество экспертов (10 человек) задает частоту встречаемости каждой оценки, и эту частоту можно (с определенными оговорками, связанными, в частности, с малым количеством экспертов) считать элементарной вероятностью $p(\alpha)$ свершения случайного события α, $\alpha \in \{0, 0.1, ..., 0.9, 1\}$. По элементарным вероятностям, которые легко получаются из табл.16.1 делением всех значений на 10, строим накопленные вероятности, последовательно суммируя для каждой пары (a_i,b_j) значения вероятностей $p(1)$, $p(0.9)$, ..., $p(0.1)$, $p(0)$ (табл.16.2).

Например, для пары (a_1,b_1) накопленная вероятность того, что свершатся случайные события α со значениями, не меньшими, чем 0.5, равна

$$p(1)+p(0.9)+p(0.8)+p(0.7)+p(0.6)+p(0.5)=0.6.$$

Это означает, что с вероятностью 0.6 эксперты оценят влияние модернизации производственного оборудования на рост числа продаж (в физических единицах) значением, не меньшим, чем 0.5.

Как можно заметить, данные из табл.16.2 без ущерба для их идентичности объединяют случайные и нечеткие элементы, что в какой-то мере уменьшает степень субъективности каждого эксперта.

Для нахождения накопленных следствий первого и второго порядков было запрошено мнение экспертов относительно возможных инциденций каждого из понятий, составляющих "причину", на все такие "причины",

Таблица 16.1

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	0	0	0	1	0	0	9	7
	.1	0	0	1	2	0	1	1
	.2	0	0	0	3	0	0	0
	.3	2	1	3	2	0	0	1
	.4	2	0	1	2	0	0	1
	.5	3	2	0	1	0	0	0
	.6	0	0	1	0	0	0	0
	.7	2	3	1	0	0	0	0
	.8	0	2	2	0	1	0	0
	.9	1	1	0	0	3	0	0
	1	0	1	0	0	6	0	0
a_2	0	0	1	0	0	1	2	0
	.1	0	1	0	2	0	2	0
	.2	0	1	1	3	1	1	0
	.3	0	0	3	1	1	1	0
	.4	3	1	1	3	2	0	0
	.5	2	1	1	0	5	1	1
	.6	4	3	2	0	0	3	2
	.7	0	2	1	1	0	0	0
	.8	1	0	1	0	0	0	3
	.9	0	0	0	0	0	0	3
	1	0	0	0	0	0	0	1
a_3	0	0	0	0	0	0	2	0
	.1	0	1	0	0	0	2	0
	.2	0	2	1	1	0	1	0
	.3	0	0	0	3	1	0	0
	.4	0	1	2	0	0	2	0
	.5	0	0	0	1	0	1	0
	.6	2	3	1	3	1	0	0
	.7	2	1	2	1	0	0	2
	.8	4	2	1	1	6	2	1
	.9	2	0	3	0	1	0	2
	1	0	0	0	0	1	0	5
a_4	0	0	2	0	0	6	3	10
	.1	0	3	0	0	4	2	0
	.2	0	5	0	0	0	1	0
	.3	0	0	0	0	0	1	0
	.4	0	0	0	0	0	1	0
	.5	0	0	0	1	0	0	0
	.6	0	0	0	1	0	2	0
	.7	0	0	2	3	0	0	0
	.8	0	0	5	3	0	0	0
	.9	1	0	1	1	0	0	0
	1	9	0	2	1	0	0	0
a_5	0	0	0	0	0	10	7	10
	.1	0	0	0	1	0	2	0
	.2	0	0	1	4	0	0	0
	.3	0	0	3	0	0	0	0
	.4	0	0	0	1	0	1	0
	.5	3	0	3	2	0	0	0
	.6	6	3	2	2	0	0	0
	.7	0	2	1	0	0	0	0
	.8	0	4	0	0	0	0	0
	.9	1	1	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_6	0	0	0	1	2	0	9	8
	.1	2	0	2	3	0	1	0
	.2	5	0	2	2	0	0	0
	.3	2	1	1	1	0	0	2
	.4	1	2	1	1	0	0	0
	.5	0	0	1	1	0	0	0
	.6	0	2	2	0	0	0	0
	.7	0	2	0	0	0	0	0
	.8	0	2	0	0	0	0	0
	.9	0	1	0	0	3	0	0
	1	0	0	0	0	7	0	0
a_7	0	0	3	0	1	10	0	0
	.1	0	2	2	4	0	0	0
	.2	0	3	2	1	0	0	0
	.3	2	1	1	3	0	0	0
	.4	2	1	0	0	0	0	0
	.5	1	0	2	1	0	0	0
	.6	1	0	2	0	0	0	2
	.7	2	0	1	0	0	1	2
	.8	2	0	0	0	0	2	3
	.9	0	0	0	0	0	1	2
	1	0	0	0	0	0	6	1
a_8	0	0	3	0	0	10	0	2
	.1	0	0	0	0	0	0	1
	.2	0	3	0	0	0	0	1
	.3	0	3	0	0	0	0	0
	.4	0	0	0	0	0	0	1
	.5	0	0	0	0	0	0	0
	.6	0	1	0	4	0	0	2
	.7	0	0	2	3	0	0	0
	.8	2	0	1	3	0	0	1
	.9	1	0	1	0	0	0	2
	1	7	0	6	0	0	10	0
a_9	0	0	0	0	0	10	3	10
	.1	0	0	0	0	0	1	0
	.2	0	0	0	0	0	1	0
	.3	0	1	0	0	0	0	0
	.4	0	1	0	1	0	1	0
	.5	0	0	1	0	0	0	0
	.6	0	2	0	0	0	4	0
	.7	1	2	3	2	0	0	0
	.8	1	4	2	3	0	0	0
	.9	2	0	4	4	0	0	0
	1	6	0	0	0	0	0	0

Таблица 16.2

$\underset{\sim}{M} =$

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	.9	1	1	.1	.3
	.2	1	1	.8	.8	1	0	.2
	.3	1	1	.8	.5	1	0	.2
	.4	.8	.9	.5	.3	1	0	.1
	.5	.6	.9	.4	.1	1	0	0
	.6	.3	.7	.4	0	1	0	0
	.7	.3	.7	.3	0	1	0	0
	.8	.1	.4	.2	0	1	0	0
	.9	.1	.2	0	0	.9	0	0
	1	0	.1	0	0	.6	0	0
a_2	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	.9	1	1	.9	.8	1
	.2	1	.8	1	.8	.9	.6	1
	.3	1	.7	.9	.5	.8	.5	1
	.4	1	.7	.6	.4	.7	.4	1
	.5	.7	.6	.5	.1	.5	.4	1
	.6	.5	.5	.4	.1	0	.3	.9
	.7	.1	.2	.2	.1	0	0	.7
	.8	.1	0	.1	0	0	0	.7
	.9	0	0	0	0	0	0	.4
	1	0	0	0	0	0	0	.1
a_3	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	.8	1
	.2	1	.9	1	1	1	.6	1
	.3	1	.7	.9	.9	1	.5	1
	.4	1	.7	.9	.6	.9	.5	1
	.5	1	.6	.7	.6	.9	.3	1
	.6	1	.6	.7	.5	.9	.2	1
	.7	.8	.3	.6	.2	.8	.2	1
	.8	.6	.2	.4	.1	.8	.2	.8
	.9	.2	0	.3	0	.2	0	.7
	1	0	0	0	0	.1	0	.5
a_4	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	.8	1	1	.4	.7	0
	.2	1	.5	1	1	0	.5	0
	.3	1	0	1	1	0	.4	0
	.4	1	0	1	1	0	.3	0
	.5	1	0	1	1	0	.2	0
	.6	1	0	1	.9	0	.2	0
	.7	1	0	1	.8	0	0	0
	.8	1	0	.8	.5	0	0	0
	.9	1	0	.3	.2	0	0	0
	1	.9	0	.2	.1	0	0	0
a_5	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	0	.3	0
	.2	1	1	1	.9	0	.1	0
	.3	1	1	.9	.5	0	.1	0
	.4	1	1	.6	.5	0	.1	0
	.5	1	1	.6	.4	0	0	0
	.6	.7	1	.3	.2	0	0	0
	.7	.1	.7	.1	0	0	0	0
	.8	.1	.5	0	0	0	0	0
	.9	.1	.1	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	0	0
a_6	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	.9	.8	1	.1	.2
	.2	.8	1	.7	.5	1	0	.2
	.3	.3	1	.5	.3	1	0	.2
	.4	.1	.9	.4	.2	1	0	0
	.5	0	.7	.3	.1	1	0	0
	.6	0	.7	.2	0	1	0	0
	.7	0	.5	0	0	1	0	0
	.8	0	.3	0	0	1	0	0
	.9	0	.1	0	0	1	0	0
	1	0	0	0	0	.7	0	0
a_7	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	.7	1	.9	0	1	1
	.2	1	.5	.8	.5	0	1	1
	.3	1	.2	.6	.4	0	1	1
	.4	.8	.1	.5	.1	0	1	1
	.5	.6	0	.5	.1	0	1	1
	.6	.5	0	.3	0	0	1	1
	.7	.4	0	.1	0	0	1	.8
	.8	.2	0	0	0	0	.9	.6
	.9	0	0	0	0	0	.7	.3
	1	0	0	0	0	0	.6	.1
a_8	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	.7	1	1	0	1	.8
	.2	1	.7	1	1	0	1	.7
	.3	1	.4	1	1	0	1	.6
	.4	1	.1	1	1	0	1	.6
	.5	1	.1	1	1	0	1	.5
	.6	1	.1	1	1	0	1	.5
	.7	1	0	1	.6	0	1	.3
	.8	1	0	.8	.3	0	1	.3
	.9	.8	0	.7	0	0	1	.2
	1	.7	0	.6	0	0	1	0
a_9	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	0	.7	0
	.2	1	1	1	1	0	.6	0
	.3	1	1	1	1	0	.5	0
	.4	1	.9	1	1	0	.5	0
	.5	1	.8	1	.9	0	.4	0
	.6	1	.8	.9	.9	0	.4	0
	.7	1	.6	.9	.9	0	0	0
	.8	.9	.4	.6	.7	0	0	0
	.9	.8	0	.4	.4	0	0	0
	1	.6	0	0	0	0	0	0

т. е. необходимо было оценить инциденции средств a_j влияния на качество производства на самих себя.

В итоге получаем 10 новых квадратных матриц $\underset{\sim}{A}^{(j)}$, j=1,2,...,10, размерностью 9×9 :

$\underset{\sim}{A}^{(1)}=$

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9
a1	1	.7	.2	.5	.8	0	0	.1	0
a2	0	1	0	.1	.2	0	0	.4	0
a3	.5	.1	1	.6	.6	.5	.6	.5	.6
a4	.7	.9	.7	1	0	.4	.1	.5	.8
a5	0	0	0	0	1	0	0	.3	.4
a6	.4	0	.1	.5	.5	1	0	0	0
a7	0	.3	0	.2	0	0	1	.4	.1
a8	.5	.8	.6	.7	.5	.2	.8	1	.9
a9	0	0	0	.4	.3	.2	.2	.7	1

$\underset{\sim}{A}^{(2)}=$

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9
a1	1	.7	0	.9	.7	.6	0	.4	.2
a2	0	1	0	.6	.3	.1	.6	.5	.4
a3	.6	.7	1	.8	.5	.6	.6	.6	.6
a4	.8	1	0	1	.5	.7	.2	.8	1
a5	0	.5	0	0	1	.4	0	.5	.7
a6	.4	.3	.6	.5	.6	1	0	0	.1
a7	0	.7	0	0	0	0	1	.5	.4
a8	.6	.9	.3	.7	.5	.4	1	1	1
a9	0	.7	.2	.6	.7	.4	.5	.6	1

$\underset{\sim}{A}^{(3)}=$

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9
a1	1	.8	.8	.5	.6	.7	0	.4	.2
a2	0	1	0	0	.1	0	.6	.7	.7
a3	.8	.6	1	.7	.7	.6	.6	.7	.7
a4	.5	.9	.5	1	0	.6	0	.8	1
a5	0	.4	0	0	1	.2	0	.3	.8
a6	.2	.4	.6	.3	.3	1	0	0	0
a7	0	.7	0	.1	0	0	1	.4	.2
a8	.7	.9	.4	.8	.7	.4	1	1	1
a9	.2	.8	0	.5	.6	.4	.4	.9	1

$\underset{\sim}{A}^{(4)}=$

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9
a1	1	.8	.6	.4	.5	.2	0	0	0
a2	.1	1	0	0	0	.2	.6	.1	.3
a3	.8	.3	1	.8	.8	.5	.6	.6	.4
a4	.7	1	.5	1	0	.3	0	.6	1
a5	.4	.2	.1	0	1	.2	0	.6	.9
a6	.1	.2	.4	0	.1	1	0	0	0
a7	0	.7	0	0	0	0	1	.6	0
a8	.8	.9	.5	.9	.7	.6	1	1	.9
a9	0	.7	0	.6	.8	.2	.6	.8	1

$\underset{\sim}{A}^{(5)}=$

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9
a1	1	.9	.6	.5	.6	.4	0	.2	0
a2	0	1	0	.1	.2	0	.5	.6	.6
a3	.5	.4	1	.8	.6	.2	.5	.5	.4
a4	1	1	.7	1	0	.2	.1	.5	.9
a5	.2	.3	0	0	1	0	0	.4	.7
a6	0	0	.6	0	0	1	0	0	0
a7	0	.7	0	0	0	0	1	.3	.2
a8	.1	.9	.6	.5	.5	.3	.9	1	1
a9	0	.2	0	.2	.1	0	.3	.4	1

$\underset{\sim}{A}^{(6)}=$

	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9
a1	1	.6	.6	.5	.6	0	0	.1	0
a2	0	1	0	.3	0	0	.3	.2	.7
a3	.6	.5	1	.6	.6	.2	.3	.4	.1
a4	.5	1	.4	1	0	.4	0	.8	1
a5	0	.4	0	0	1	0	.2	.4	1
a6	0	0	.5	0	.4	1	0	0	0
a7	0	1	0	0	0	0	1	.3	0
a8	.6	.7	.4	.7	.3	0	1	1	1
a9	0	.4	0	0	.3	0	.2	.3	1

$\underset{\sim}{A}^{(7)}=$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_1	1	.8	.7	.5	.5	0	0	.1	0
a_2	0	1	0	.2	0	0	.3	.6	.6
a_3	.6	.4	1	.6	.5	.3	.1	.4	.2
a_4	.7	1	.6	1	0	.4	.2	.7	1
a_5	.3	.4	0	0	1	0	0	.5	.7
a_6	0	0	.2	.3	.3	1	0	0	0
a_7	0	.6	0	0	0	0	1	.4	0
a_8	.2	1	.3	.6	.5	.2	.4	1	1
a_9	0	0	0	.1	0	0	0	.7	1

$\underset{\sim}{A}^{(8)}=$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_1	1	.6	.4	.3	.5	0	0	.3	0
a_2	0	1	0	.3	.4	0	.5	.6	.6
a_3	.8	.6	1	.9	.9	.6	.6	.6	.6
a_4	.9	1	.6	1	0	.5	.1	.8	1
a_5	.4	.4	0	0	1	.1	.1	.6	1
a_6	.1	.3	.5	.5	.6	1	0	0	0
a_7	0	.8	.1	0	0	0	1	.6	0
a_8	.3	1	.2	.7	.4	.4	1	1	1
a_9	0	.2	0	.6	.7	0	0	.9	1

$\underset{\sim}{A}^{(9)}=$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_1	1	1	.9	.8	.9	0	0	.1	0
a_2	0	1	0	.1	.1	0	0	.6	.6
a_3	.7	.3	1	.8	.8	.5	.5	.5	.5
a_4	1	1	.8	1	0	.4	0	.8	1
a_5	.3	.4	0	0	1	.4	0	.7	.9
a_6	0	.4	.3	.5	.7	1	0	0	0
a_7	0	1	0	0	0	0	1	.6	.2
a_8	.6	1	.3	.8	.9	.2	1	1	1
a_9	0	0	0	.3	.4	0	0	.4	1

$\underset{\sim}{A}^{(10)}=$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_1	1	.9	.8	.6	.7	0	0	.3	0
a_2	0	1	0	.3	.6	0	.6	.9	.9
a_3	.6	.4	1	.6	.7	.4	.2	.5	.4
a_4	.9	1	.3	1	0	.5	0	.8	1
a_5	.2	.5	0	0	1	.2	0	.6	.9
a_6	0	.4	.3	.6	.7	1	0	0	0
a_7	0	.8	0	.1	0	0	1	.6	0
a_8	.5	.9	.4	.7	.9	.4	1	1	1
a_9	0	0	0	.4	.5	0	0	.8	1

Как и в случае с матрицами $\underset{\sim}{M}^{(j)}$, здесь также наблюдаются и абсолютные совпадения оценок некоторых инциденций, и довольно значительные расхождения мнений. Очевидно, что эти матрицы являются рефлексивными, поскольку инциденция каждого элемента на самого себя всегда равна 1. После получения матриц $\underset{\sim}{A}^{(j)}$ приступаем к их обобщению, как в случае матриц $\underset{\sim}{M}^{(j)}$. Опять соберем статистику встречаемости каждой оценки α для каждой пары (a_j,a_k), $j,k=1, 2, ...,9$ (табл.16.3).

По этим данным так же, как и ранее, находим накопленные вероятности (табл.16.4).

Данные из табл.16.4 позволяют увидеть, каким образом сближаются или расходятся мнения экспертов о каждом из отношений. Если взять, например, пару (a_1,a_7), т. е. инциденции модернизации оборудования на улучшение работы транспортных средств, то можно убедиться, что существует полное совпадение мнений всех экспертов: такой инциденции не существует. Это же отражено в седьмом столбце части a_1 табл.16.4, потому что во всех оценках от α=1 до α=0.1 имеется нулевая накопленная вероятность и только для α=0 она равна 1.

Таблица 16.3

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
a_1	0	0	0	1	0	0	6	10	1	8
	.1	0	0	0	0	0	0	0	4	0
	.2	0	0	1	0	0	1	0	1	2
	.3	0	0	0	1	0	0	0	2	0
	.4	0	0	1	1	0	1	0	2	0
	.5	0	0	0	5	3	0	0	0	0
	.6	0	2	3	1	3	1	0	0	0
	.7	0	2	1	0	2	1	0	0	0
	.8	0	3	2	1	1	0	0	0	0
	.9	0	2	1	1	1	0	0	0	0
	1	10	1	0	0	0	0	0	0	0
a_2	0	9	0	10	2	3	8	2	0	1
	.1	1	0	0	3	2	1	0	1	0
	.2	0	0	0	1	2	1	0	1	0
	.3	0	0	0	3	1	0	2	0	1
	.4	0	0	0	0	1	0	0	1	1
	.5	0	0	0	0	0	0	2	1	0
	.6	0	0	0	1	1	0	4	4	4
	.7	0	0	0	0	0	0	0	1	2
	.8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	.9	0	0	0	0	0	0	0	1	1
	1	0	10	0	0	0	0	0	0	0
a_3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	.1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
	.2	0	0	0	0	0	3	1	0	1
	.3	0	2	0	0	0	0	1	0	0
	.4	0	3	0	0	0	1	0	2	3
	.5	2	1	0	0	2	3	2	4	1
	.6	4	2	0	4	3	3	5	2	3
	.7	1	1	0	1	2	0	0	1	1
	.8	3	0	0	4	2	0	0	1	0
	.9	0	0	0	1	1	0	0	0	0
	1	0	0	10	0	0	0	0	0	0
a_4	0	0	0	1	0	9	0	5	0	0
	.1	0	0	0	0	0	0	3	0	0
	.2	0	0	0	0	0	1	2	0	0
	.3	0	0	1	0	0	1	0	0	0
	.4	0	0	1	0	0	4	0	0	0
	.5	2	0	2	0	1	2	0	2	0
	.6	0	0	2	0	0	1	0	1	0
	.7	3	0	2	0	0	1	0	1	0
	.8	1	0	1	0	0	0	0	6	1
	.9	2	2	0	0	0	0	0	0	1
	1	2	8	0	10	0	0	0	0	8
a_5	0	4	1	9	10	0	4	8	0	0
	.1	0	0	1	0	0	1	1	0	0
	.2	2	1	0	0	0	3	1	0	0
	.3	2	1	0	0	0	0	0	2	0
	.4	2	5	0	0	0	2	0	2	1
	.5	0	2	0	0	0	0	0	2	0
	.6	0	0	0	0	0	0	0	3	0
	.7	0	0	0	0	0	0	0	1	3
	.8	0	0	0	0	0	0	0	0	1
	.9	0	0	0	0	0	0	0	0	3
	1	0	0	0	0	10	0	0	0	2
a_6	0	5	4	0	3	1	0	10	10	9
	.1	2	0	1	0	1	0	0	0	1
	.2	1	1	1	0	0	0	0	0	0
	.3	0	2	2	2	2	0	0	0	0
	.4	2	3	1	0	1	0	0	0	0
	.5	0	0	2	4	1	0	0	0	0
	.6	0	0	3	1	2	0	0	0	0
	.7	0	0	0	0	2	0	0	0	0
	.8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	10	0	0	0
a_7	0	10	0	9	7	10	10	0	0	5
	.1	0	0	1	2	0	0	0	0	1
	.2	0	0	0	1	0	0	0	0	3
	.3	0	1	0	0	0	0	0	2	0
	.4	0	0	0	0	0	0	0	3	i
	.5	0	0	0	0	0	0	0	1	0
	.6	0	1	0	0	0	0	0	4	0
	.7	0	4	0	0	0	0	0	0	0
	.8	0	2	0	0	0	0	0	0	0
	.9	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	0	2	0	0	0	0	10	0	0
a_8	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	.1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
	.2	1	0	1	0	0	3	0	0	0
	.3	1	0	3	0	1	1	0	0	0
	.4	0	0	3	0	1	4	1	0	0
	.5	2	0	1	1	4	0	0	0	0
	.6	3	0	2	1	0	1	0	0	0
	.7	1	1	0	5	2	0	0	0	0
	.8	1	1	0	2	0	0	1	0	0
	.9	0	5	0	1	2	0	1	0	2
	1	0	3	0	0	0	0	7	10	8
a_9	0	9	4	9	1	1	6	4	0	0
	.1	0	0	0	1	1	0	0	0	0
	.2	1	2	1	1	0	2	2	0	0
	.3	0	0	0	1	2	0	1	1	0
	.4	0	1	0	2	1	2	1	2	0
	.5	0	0	0	1	1	0	1	0	0
	.6	0	0	0	3	1	0	1	1	0
	.7	0	2	0	0	2	0	0	2	0
	.8	0	1	0	0	1	0	0	2	0
	.9	0	0	0	0	0	0	0	2	0
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	10

Т а б л и ц а 16.4

$\underset{\sim}{A} =$

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	.9	1	1	.4	0	.9	.2
	.2	1	1	.9	1	1	.4	0	.5	.2
	.3	1	1	.8	1	1	.3	0	.4	0
	.4	1	1	.8	.9	1	.3	0	.2	0
a_1	.5	1	1	.7	.8	1	.2	0	0	0
	.6	1	1	.7	.3	.7	.2	0	0	0
	.7	1	.8	.4	.2	.4	.1	0	0	0
	.8	1	.6	.3	.2	.2	0	0	0	0
	.9	1	.3	.1	.1	.1	0	0	0	0
	1	1	.1	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	.1	1	0	.8	.7	.2	.8	1	.9
	.2	0	1	0	.5	.5	.1	.8	.9	.9
	.3	0	1	0	.4	.3	0	.8	.8	.9
	.4	0	1	0	.1	.2	0.	.6	.8	.8
a_2	.5	0	1	0	.1	.1	0	.6	.7	.7
	.6	0	1	0	.1	.1	0	.4	.6	.7
	.7	0	1	0	0	0	0	0	.2	.3
	.8	0	1	0	0	0	0	0	.1	.1
	.9	0	1	0	0	0	0	0	.1	.1
	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	.9	1	1	1	1	.9	1	.9
	.3	1	.9	1	1	1	.7	.8	1	.8
	.4	1	.7	1	1	1	.7	.7	1	.8
	.5	1	.4	1	1	1	.6	.7	.8	.5
a_3	.6	.8	.3	1	1	.8	.3	.5	.4	.4
	.7	.4	.1	1	.6	.5	0	0	.2	.1
	.8	.3	0	1	.5	.3	0	0	.1	0
	.9	0	0	1	.1	.1	0	0	0	0
	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0
	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	.9	1	.1	1	.5	1	1
	.2	1	1	.9	1	.1	1	.2	1	1
	.3	1	1	.9	1	.1	.9	0	1	1
	.4	1	1	.8	1	.1	.8	0	1	1
	.5	1	1	.7	1	.1	.4	0	1	1
a_4	.6	.8	1	.5	1	0	.2	0	.8	1
	.7	.8	1	.3	1	0	.1	0	.7	1
	.8	.5	1	.1	1	0	0	0	.6	1
	.9	.4	1	0	1	0	0	0	0	.9
	1	.2	.8	0	1	0	0	0	0	.8
	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	.6	.9	.1	0	1	.6	.2	1	1
	.2	.6	.9	0	0	1	.5	.1	1	1
a_5	.3	.4	.8	0	0	1	.2	0	1	1
	.4	.2	.7	0	0	1	.2	0	.8	1
	.5	0	.2	0	0	1	0	0	.6	.9
	.6	0	0	0	0	1	0	0	.4	.9
	.7	0	0	0	0	1	0	0	.1	.9
	.8	0	0	0	0	1	0	0	0	.6
	.9	0	0	0	0	1	0	0	0	.5
	1	0	0	0	0	1	0	0	0	.2

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	.5	.6	1	.7	.9	1	0	0	.1
	.2	.3	.6	.9	.7	.8	1	0	0	0
	.3	.2	.5	.8	.7	.8	1	0	0	0
	.4	.2	.3	.6	.5	.6	1	0	0	0
a_6	.5	0	0	.5	.5	.5	1	0	0	0
	.6	0	0	.3	.1	.4	1	0	0	0
	.7	0	0	0	0	.2	1	0	0	0
	.8	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	.9	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	0	1	.1	.3	0	0	1	1	.5
	.2	0	1	0	.1	0	0	1	1	.4
	.3	0	1	0	0	0	0	1	1	.1
	.4	0	.9	0	0	0	0	1	.8	.1
a_7	.5	0	.9	0	0	0	0	1	.5	0
	.6	0	.9	0	0	0	0	1	.4	0
	.7	0	.8	0	0	0	0	1	0	0
	.8	0	.4	0	0	0	0	1	0	0
	.9	0	.2	0	0	0	0	1	0	0
	1	0	.2	0	0	0	0	1	0	0
	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	.9	1	1	1
	.2	.9	1	1	1	1	.9	1	1	1
	.3	.8	1	.9	1	1	.6	1	1	1
	.4	.7	1	.6	1	.9	.5	1	1	1
a_8	.5	.7	1	.3	1	.8	.1	.9	1	1
	.6	.5	1	.2	.9	.4	.1	.9	1	1
	.7	.2	1	0	.8	.4	0	.9	1	1
	.8	.1	.9	0	.3	.2	0	.9	1	1
	.9	0	.8	0	.1	.2	0	.8	1	1
	1	0	.3	0	0	0	0	.7	1	.8
	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	.1	.6	.1	.9	.9	.4	.6	1	1
	.2	.1	.6	.1	.8	.8	.4	.6	1	1
	.3	0	.4	0	.7	.8	.2	.4	1	1
	.4	0	.4	0	.6	.6	.2	.3	.9	1
a_9	.5	0	.3	0	.4	.5	0	.2	.7	1
	.6	0	.3	0	.3	.4	0	.1	.7	1
	.7	0	.3	0	0	.3	0	0	.6	1
	.8	0	.1	0	0	.1	0	0	.4	1
	.9	0	0	0	0	0	0	0	.2	1
	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Для других пар, например пары (a_1,a_3), т. е. инциденции модернизации оборудования на повышение квалификации работающих, в оценках различных экспертов проявляются значительные расхождения, находящие отражение в третьем столбце части a_1 табл.16.4, поскольку накопленная вероятность по мере перехода от $\alpha=1$ к $\alpha=0$ растет постепенно (за исключением перехода от $\alpha=0.7$ к $\alpha=0.6$, где совпадают мнения трех экспертов).

Анализ процессов накопления вероятностей для каждой пары при снижении уровней инциденций позволяет составить полную картину соотношения мнений, которые выразили эксперты.

Наконец, на первом этапе получения и подготовки информации также запрашивались мнения 10 экспертов относительно возможных инциденций каждого из понятий, составляющих "следствия", на все такие "следствия", т. е. необходимо было оценить инциденции факторов b_j, определяющих имидж предприятия, на себя.

В итоге получилось еще 10 квадратных рефлексивных матриц $\underset{\sim}{B}^{(j)}$, $j=1,2,\ldots,10$, размерностью 7×7:

$\underset{\sim}{B}^{(1)}=$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
b_1	1	.7	.8	1	0	0	0
b_2	1	1	.9	.5	.5	0	0
b_3	1	.2	1	1	0	.2	0
b_4	1	.6	.3	1	0	.4	0
b_5	1	1	.8	0	1	0	0
b_6	1	0	.7	.8	0	1	.9
b_7	1	0	.4	0	0	0	1

$\underset{\sim}{B}^{(2)}=$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
b_1	1	.6	1	1	0	.4	0
b_2	1	1	1	.3	.1	0	.1
b_3	.8	.3	1	.6	0	.6	0
b_4	1	.2	.5	1	0	0	0
b_5	1	1	.9	.1	1	.1	0
b_6	1	0	.9	.6	0	1	1
b_7	.8	0	.2	.1	0	0	1

$\underset{\sim}{B}^{(3)}=$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
b_1	1	.5	.7	1	0	.5	0
b_2	1	1	.9	.4	.1	0	0
b_3	1	.2	1	1	0	.6	0
b_4	.9	0	.6	1	0	.5	0
b_5	1	1	.9	.6	1	0	0
b_6	1	.1	1	.8	0	1	.8
b_7	1	0	.5	1	0	.1	1

$\underset{\sim}{B}^{(4)}=$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
b_1	1	.6	.5	1	0	.7	0
b_2	1	1	1	.8	.2	0	.4
b_3	.9	.1	1	1	0	0	0
b_4	.9	0	.5	1	0	.7	0
b_5	.9	.6	1	.3	1	0	0
b_6	1	0	1	.7	0	1	1
b_7	.8	.4	.6	.1	0	.4	1

$\underset{\sim}{B}^{(5)}=$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
b_1	1	.8	.5	.7	0	0	0
b_2	1	1	1	.5	.2	0	0
b_3	.8	.1	1	1	0	.6	0
b_4	.3	.2	.3	1	0	.1	.1
b_5	.8	1	1	.6	1	.6	0
b_6	1	0	1	.1	0	1	.7
b_7	.8	.2	.5	.2	0	.6	1

$\underset{\sim}{B}^{(6)}=$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
b_1	1	.4	.1	.7	0	.6	0
b_2	1	1	.9	.2	.7	0	.4
b_3	1	.5	1	1	0	.3	0
b_4	.6	.5	.6	1	0	.3	0
b_5	1	1	1	.7	1	0	0
b_6	1	0	1	.6	0	1	.8
b_7	.7	.2	.6	.1	0	0	1

$\underset{\sim}{B}^{(7)}=$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
b_1	1	.6	.9	1	0	.1	0
b_2	1	1	.9	.6	.5	0	.6
b_3	1	.1	1	1	0	0	0
b_4	.6	0	.5	1	0	.1	.1
b_5	1	.9	.9	0	1	0	0
b_6	1	0	1	.4	0	1	.9
b_7	.8	0	.6	.1	0	0	1

$\underset{\sim}{B}^{(8)}=$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
b_1	1	.8	.6	1	.1	.6	0
b_2	1	1	.8	.8	.7	.1	0
b_3	1	.4	1	1	0	.4	0
b_4	.4	.3	.5	1	0	0	0
b_5	1	.8	.9	.3	1	.5	0
b_6	1	0	1	.5	0	1	.6
b_7	.7	.1	.5	.1	0	0	1

$\underset{\sim}{B}^{(9)}=$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
b_1	1	.7	.9	1	0	.1	0
b_2	1	1	.9	.3	.4	0	.4
b_3	.9	.2	1	1	0	.2	0
b_4	.3	.3	.4	1	0	.4	0
b_5	1	.8	1	.6	1	.2	0
b_6	1	0	.9	.5	0	1	.6
b_7	.8	.4	.6	.1	0	0	1

$\underset{\sim}{B}^{(10)}=$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
b_1	1	.8	.4	1	0	.7	0
b_2	1	1	1	.4	.3	0	.3
b_3	1	.4	1	1	0	.7	0
b_4	.4	.1	.6	1	0	.5	0
b_5	1	1	1	.7	1	.3	0
b_6	1	.2	1	.7	0	1	.7
b_7	.7	.4	.6	.3	0	0	1

Как и в случае с матрицами $\underset{\sim}{M}^{(j)}$ и $\underset{\sim}{A}^{(j)}$, здесь также наблюдается и абсолютное совпадение оценок некоторых инциденций, и довольно значительные расхождения мнений.

Как и ранее, обобщаем матрицы $\underset{\sim}{B}^{(j)}$ путем подсчета статистики встречаемости каждой оценки α для каждой пары (b_j, b_k), $j,k=1,2,...,7$ (табл.16.5).

По этим данным так же, как и ранее, находим накопленные вероятности (табл.16.6).

Т а б л и ц а 16.5

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
	0	0	0	0	0	9	2	10
	.1	0	0	1	0	1	2	0
	.2	0	0	0	0	0	0	0
	.3	0	0	0	0	0	0	0
	.4	0	1	1	0	0	1	0
b_1	.5	0	1	2	0	0	1	0
	.6	0	3	1	0	0	2	0
	.7	0	2	1	2	0	2	0
	.8	0	3	1	0	0	0	0
	.9	0	0	2	0	0	0	0
	1	10	0	1	8	0	0	0
	0	0	0	0	0	0	9	4
	.1	0	0	0	0	2	1	1
	.2	0	0	0	1	2	0	0
	.3	0	0	0	2	1	0	1
	.4	0	0	0	2	1	0	3
b_2	.5	0	0	0	2	2	0	0
	.6	0	0	0	1	0	0	1
	.7	0	0	0	0	2	0	0
	.8	0	0	1	2	0	0	0
	.9	0	0	5	0	0	0	0
	1	10	10	4	0	0	0	0
	0	0	0	0	0	10	2	10
	.1	0	3	0	0	0	0	0
	.2	0	3	0	0	0	2	0
	.3	0	1	0	0	0	1	0
	.4	0	2	0	0	0	1	0
b_3	.5	0	1	0	0	0	0	0
	.6	0	0	0	1	0	3	0
	.7	0	0	0	0	0	1	0
	.8	2	0	0	0	0	0	0
	.9	2	0	0	0	0	0	0
	1	6	0	10	9	0	0	0
	0	0	3	0	0	10	2	8
	.1	0	1	0	0	0	2	2
	.2	0	2	0	0	0	0	0
	.3	2	2	2	0	0	1	0
	.4	2	0	1	0	0	2	0
b_4	.5	0	1	4	0	0	2	0
	.6	2	1	3	0	0	0	0
	.7	0	0	0	0	0	1	0
	.8	0	0	0	0	0	0	0
	.9	2	0	0	0	0	0	0
	1	2	0	0	10	0	0	0

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
	0	0	0	0	2	0	5	10
	.1	0	0	0	1	0	1	0
	.2	0	0	0	0	0	1	0
	.3	0	0	0	2	0	1	0
	.4	0	0	0	0	0	0	0
b_5	.5	0	0	0	0	0	1	0
	.6	0	1	0	3	0	1	0
	.7	0	0	0	2	0	0	0
	.8	1	2	1	0	0	0	0
	.9	1	1	4	0	0	0	0
	1	8	6	5	0	10	0	0
	0	0	8	0	0	10	0	0
	.1	0	1	0	1	0	0	0
	.2	0	1	0	0	0	0	0
	.3	0	0	0	0	0	0	0
	.4	0	0	0	1	0	0	0
b_6	.5	0	0	0	2	0	0	0
	.6	0	0	0	2	0	0	2
	.7	0	0	1	2	0	0	2
	.8	0	0	0	2	0	0	2
	.9	0	0	2	0	0	0	2
	1	10	0	7	0	0	10	2
	0	0	4	0	1	10	7	0
	.1	0	1	0	7	0	1	0
	.2	0	2	1	1	0	0	0
	.3	0	0	0	1	0	0	0
	.4	0	3	1	0	0	1	0
b_7	.5	0	0	3	0	0	0	0
	.6	0	0	5	0	0	1	0
	.7	3	0	0	0	0	0	0
	.8	5	0	0	0	0	0	0
	.9	0	0	0	0	0	0	0
	1	2	0	0	0	0	0	10

Оставим читателю возможность (если он сочтет это целесообразным) порассуждать над числовыми значениями табл.16.6 (по аналогии с рассуждениями, проведенными с табл.16.2 и 16.4).

Для получения накопленных следствий первого и второго порядков необходимо последовательно, уровень за уровнем, вычислить (как в §9 и § 11) случайные нечеткие матрицы $\underset{\sim}{M}^{*} = \underset{\sim}{A} \circ \underset{\sim}{M} \circ \underset{\sim}{B}$. Для этого из табл. 16.2, 16.4, 16.6 выпишем соответственно по 11 случайных нечетких матриц $\underset{\sim}{M}_{\alpha}, \underset{\sim}{A}_{\alpha}, \underset{\sim}{B}_{\alpha}$ для α =1,0.9,...,0.1,0 и образуем свертки maxmin уровень за уровнем, сначала для получения $\underset{\sim}{A}_\alpha \circ \underset{\sim}{M}_\alpha$, а затем для $\underset{\sim}{M}_\alpha^* = \underset{\sim}{A}_\alpha \circ \underset{\sim}{M}_\alpha \circ \underset{\sim}{B}_\alpha$.

При этом осуществляется не что иное, как представление для каждого уровня оцениваемой инциденции "накопленных вероятностей" в соответствии с высказанными мнениями экспертов. Поэтому чем бо́льшим будет рассматриваемый уровень α, тем больший интерес будут вызывать накопленные инциденции первого и второго порядков.

Таблица 16.6

$\underset{\sim}{B} =$

	α	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
b_1	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	.1	.8	0
	.2	1	1	.9	1	0	.6	0
	.3	1	1	.9	1	0	.6	0
	.4	1	1	.9	1	0	.6	0
	.5	1	.9	.8	1	0	.5	0
	.6	1	.8	.6	1	0	.4	0
	.7	1	.5	.5	1	0	.2	0
	.8	1	.3	.4	.8	0	0	0
	.9	1	0	.3	.8	0	0	0
	1	1	0	.1	.8	0	0	0
b_2	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	.1	.6
	.2	1	1	1	1	.8	0	.5
	.3	1	1	1	.9	.6	0	.5
	.4	1	1	1	.7	.5	0	.4
	.5	1	1	1	.5	.4	0	.1
	.6	1	1	1	.3	.2	0	.1
	.7	1	1	1	.2	.2	0	0
	.8	1	1	1	.2	0	0	0
	.9	1	1	.9	0	0	0	0
	1	1	1	.4	0	0	0	0
b_3	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	0	.8	0
	.2	1	.7	1	1	0	.8	0
	.3	1	.4	1	1	0	.6	0
	.4	1	.3	1	1	0	.5	0
	.5	1	.1	1	1	0	.4	0
	.6	1	0	1	1	0	.4	0
	.7	1	0	1	.9	0	.1	0
	.8	1	0	1	.9	0	0	0
	.9	.8	0	1	.9	0	0	0
	1	.6	0	1	.9	0	0	0
b_4	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	.7	1	1	0	.8	.2
	.2	1	.6	1	1	0	.6	0
	.3	1	.4	1	1	0	.6	0
	.4	.8	.2	.8	1	0	.5	0
	.5	.6	.2	.7	1	0	.3	0
	.6	.6	.1	.3	1	0	.1	0
	.7	.4	0	0	1	0	.1	0
	.8	.4	0	0	1	0	0	0
	.9	.4	0	0	1	0	0	0
	1	.2	0	0	1	0	0	0
b_5	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	.8	1	.5	0
	.2	1	1	1	.7	1	.4	0
	.3	1	1	1	.7	1	.3	0
	.4	1	1	1	.5	1	.2	0
	.5	1	1	1	.5	1	.2	0
	.6	1	1	1	.5	1	.1	0
	.7	1	.9	1	.2	1	0	0
	.8	1	.9	1	0	1	0	0
	.9	.9	.7	.9	0	1	0	0
	1	.8	.6	.5	0	1	0	0
b_6	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	.2	1	1	0	1	1
	.2	1	.1	1	.9	0	1	1
	.3	1	0	1	.9	0	1	1
	.4	1	0	1	.9	0	1	1
	.5	1	0	1	.8	0	1	1
	.6	1	0	1	.6	0	1	1
	.7	1	0	1	.4	0	1	.8
	.8	1	0	.9	.2	0	1	.6
	.9	1	0	.9	0	0	1	.4
	1	1	0	.7	0	0	1	.2
b_7	0	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	.6	1	.9	0	.3	1
	.2	1	.5	1	.2	0	.2	1
	.3	1	.3	.9	.1	0	.2	1
	.4	1	.3	.9	0	0	.2	1
	.5	1	0	.8	0	0	.1	1
	.6	1	0	.5	0	0	.1	1
	.7	1	0	0	0	0	0	1
	.8	.7	0	0	0	0	0	1
	.9	.2	0	0	0	0	0	1
	1	.2	0	0	0	0	0	1

Итак, найдем уровень за уровнем матрицу $\underset{\sim}{A}_{\alpha} \circ \underset{\sim}{M}_{\alpha}$, начиная от $\alpha = 1$ до $\alpha = 0$:

$\underset{\sim}{A}_{1} \circ \underset{\sim}{M}_{1} =$

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	0	.1	0	0	.6	0	.1
a2	0	0	0	0	0	0	.1
a3	0	0	0	0	.1	0	.5
a4	.9	.1	.2	.1	.2	0	.1
a5	.2	0	0	0	0	0	0
a6	0	0	0	0	.7	0	0
a7	0	0	0	0	0	.6	.1
a8	.7	0	.6	0	0	1	.1
a9	.6	0	0	0	0	0	0

$\underset{\sim}{A}_{0.9} \circ \underset{\sim}{M}_{0.9} =$

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	.1	.2	.1	.1	.9	0	.3
a2	.1	0	.1	.1	0	.1	.4
a3	.2	.1	.3	.1	.2	0	.7
a4	.1	.2	.4	.4	.4	0	.4
a5	.5	.1	.4	.4	0	0	0
a6	0	.1	0	0	1	0	0
a7	0	0	0	0	0	.7	.3
a8	.8	.1	.7	.4	0	1	.4
a9	.8	0	.4	.4	0	.2	.2

$\underset{\sim}{A}_{0.8} \circ \underset{\sim}{M}_{0.8} =$

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	.3	.4	.3	.2	1	.2	.6
a2	.1	.1	.1	.1	0	.1	.7
a3	.6	.3	.5	.5	.8	.2	.8
a4	1	.4	.8	.7	.5	.6	.7
a5	.6	.5	.6	.6	0	0	0
a6	0	.3	0	0	1	0	0
a7	.2	0	.1	0	0	.9	.6
a8	1	.4	.8	.7	.1	1	.7
a9	.9	.4	.6	.7	0	.4	.3

$\underset{\sim}{A}_{0.7} \circ \underset{\sim}{M}_{0.7} =$

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	.4	.7	.4	.2	1	.2	.7
a2	.3	.3	.3	.3	0	.2	.7
a3	.8	.5	.6	.6	.8	.2	1
a4	1	.7	1	.9	.8	.7	.7
a5	.9	.7	.9	.9	0	.1	.1
a6	.1	.5	.1	0	1	0	0
a7	.4	.2	.2	.1	0	1	.8
a8	.1	.6	1	.9	.2	1	.8
a9	1	.6	.9	.9	0	.6	.3

$\underset{\sim}{A}_{0.6} \circ \underset{\sim}{M}_{0.6} =$

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	.7	.7	.7	.5	1	.3	.9
a2	.7	.7	.7	.7	0	.6	.9
a3	1	.8	1	.9	.9	.5	1
a4	1	.8	1	.9	.8	.8	.9
a5	.9	1	.9	.9	0	.4	.4
a6	.4	.7	.3	.3	1	.2	.3
a7	.5	.5	.4	.4	0	1	1
a8	1	.8	1	1	.5	1	.9
a9	1	.8	.9	.9	0	.7	.5

$\underset{\sim}{A}_{0.5} \circ \underset{\sim}{M}_{0.5} =$

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	1	1	.8	.8	1	.4	1
a2	.7	.7	.7	.7	.5	.7	1
a3	1	1	1	1	1	.8	1
a4	1	.9	1	1	1	1	1
a5	1	1	.9	.9	.2	.6	.5
a6	.5	.7	.5	.5	1	.3	.5
a7	.7	.6	.5	.5	.5	1	1
a8	1	.8	1	1	.7	1	1
a9	1	.8	1	.9	.3	.7	.5

$\underset{\sim}{A}_{0.4} \circ \underset{\sim}{M}_{0.4} =$

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	1	1	.9	.9	1	.5	1
a2	1	.8	.8	.8	.7	.8	1
a3	1	1	1	1	1	1	1
a4	1	.9	1	1	1	1	1
a5	1	1	1	1	.7	.8	.7
a6	.6	.9	.6	.6	1	.5	.6
a7	.9	.7	.8	.8	.7	1	1
a8	1	.9	1	1	.7	1	1
a9	1	.9	1	1	.4	.9	.6

$\underset{\sim}{A}_{0.3} \circ \underset{\sim}{M}_{0.3} =$

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	1	1	1	1	1	.5	1
a2	1	.9	.9	.9	.8	.8	1
a3	1	1	1	1	1	1	1
a4	1	1	1	1	1	1	1
a5	1	1	1	1	.8	1	.8
a6	.8	1	.8	.8	1	.5	.8
a7	1	.7	1	1	.8	1	1
a8	1	1	1	1	.9	1	1
a9	1	1	1	1	.4	1	.6

$\underset{\sim}{A}_{0.2} \circ \underset{\sim}{M}_{0.2} =$

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	1	1	1	1	1	.6	.1
a2	1	.9	1	.9	.9	.9	1
a3	1	1	1	1	1	1	1
a4	1	1	1	1	1	1	1
a5	1	1	1	1	.9	1	.9
a6	.9	1	.9	.9	1	.6	.9
a7	1	.8	1	1	.9	1	1
a8	1	1	1	1	1	1	1
a9	1	1	1	1	.6	1	.7

$\underset{\sim}{A}_{0.1} \circ \underset{\sim}{M}_{0.1} =$

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	1	1	1	1	1	.9	1
a2	1	.9	1	1	.9	1	1
a3	1	1	1	1	1	1	1
a4	1	1	1	1	1	1	1
a5	1	1	1	1	.9	1	.9
a6	1	1	1	1	1	.8	1
a7	1	.9	1	1	.9	1	1
a8	1	1	1	1	1	1	1
a9	1	1	1	1	.6	1	.8

$\underset{\sim}{A}_{0} \circ \underset{\sim}{M}_{0} =$

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7
a1	1	1	1	1	1	1	1
a2	1	1	1	1	1	1	1
a3	1	1	1	1	1	1	1
a4	1	1	1	1	1	1	1
a5	1	1	1	1	1	1	1
a6	1	1	1	1	1	1	1
a7	1	1	1	1	1	1	1
a8	1	1	1	1	1	1	1
a9	1	1	1	1	1	1	1

Можно заметить, что по мере снижения уровня накопленные вероятности растут для всех элементов матриц $\underset{\sim}{A}_{\alpha}$ и $\underset{\sim}{M}_{\alpha}$ и вследствие этого для элементов матрицы $\underset{\sim}{A}_{\alpha} \circ \underset{\sim}{M}_{\alpha}$. В этом плане показательным является результат, представленный в матрице $\underset{\sim}{A}_{0.1} \circ \underset{\sim}{M}_{0.1}$, где преобладают значения 1 и 0.9 при единственном 0.6 в паре (a_9, b_5), и, конечно, в матрице $\underset{\sim}{A}_0 \circ \underset{\sim}{M}_0$. Полученные к этому моменту результаты являются частичными, поскольку вмещают только часть следствий второго порядка, связанных с инциденциями каждого из средств с самим собой и с факторами, представляющими коммерческий имидж предприятия. Для получения всех следствий второго порядка необходима свертка найденных матриц $\underset{\sim}{A}_{\alpha} \circ \underset{\sim}{M}_{\alpha}$ с соответствующими матрицами $\underset{\sim}{B}_{\alpha}$. Таким образом найдем матрицы $\underset{\sim}{M}^*_{\alpha} = \underset{\sim}{A}_{\alpha} \circ \underset{\sim}{M}_{\alpha} \circ \underset{\sim}{B}_{\alpha}$, $\alpha = 1, 0.9, \ldots, 0.1, 0$:

$\underset{\sim}{M}^*_1 =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.6	.6	.5	0	.6	0	.1
a_2	.1	0	0	0	0	0	.1
a_3	.2	.1	.1	0	.1	0	.5
a_4	.9	.2	.2	.8	.2	0	.1
a_5	.2	0	.1	.2	0	0	0
a_6	.7	.6	.5	0	.7	0	0
a_7	.6	0	.6	0	0	.6	.2
a_8	1	0	.7	.7	0	1	.2
a_9	.6	0	.1	.6	0	0	0

$\underset{\sim}{M}^*_{0.9} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.9	.7	.9	.1	.9	0	.3
a_2	.2	0	.1	.1	0	.1	.4
a_3	.3	.2	.3	.3	.2	0	.7
a_4	1	.4	.4	.8	.4	0	.4
a_5	.5	.1	.4	.5	0	0	0
a_6	.9	.7	.9	0	1	0	0
a_7	.7	0	.7	0	0	.7	.4
a_8	1	.1	.9	.8	0	1	.4
a_9	.8	0	.4	.8	0	.2	.2

$\underset{\sim}{M}^*_{0.8} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	.9	1	.3	1	.2	.6
a_2	.7	.1	.1	.1	0	.1	.7
a_3	.8	.8	.8	.6	.8	.2	.8
a_4	1	.5	.8	.8	.5	.6	.7
a_5	.6	.5	.6	.6	0	0	0
a_6	1	.9	1	.2	1	0	0
a_7	.9	.2	.9	.2	0	.9	.6
a_8	1	.4	.9	.8	.1	1	.7
a_9	.9	.4	.6	.8	0	.4	.4

$\underset{\sim}{M}^*_{0.7} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	.9	1	.4	1	.2	.7
a_2	.7	.3	.3	.3	.2	.2	.7
a_3	1	.8	.8	.8	.8	.2	1
a_4	1	.8	1	1	.8	.7	.7
a_5	.9	.7	.9	.9	.2	.2	.1
a_6	1	.9	1	.2	1	.1	0
a_7	1	.4	1	.4	.2	1	.8
a_8	1	.6	1	1	.2	1	.8
a_9	1	.6	.9	1	.2	.6	.6

$\underset{\sim}{M}^*_{0.6} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	1	.7	1	.4	.9
a_2	.9	.7	.7	.7	.2	.6	.9
a_3	1	.9	1	1	.9	.5	1
a_4	1	.8	1	1	.8	.8	.9
a_5	1	1	1	.9	.2	.4	.4
a_6	1	1	1	.5	1	.4	.3
a_7	1	.5	1	.6	.2	1	1
a_8	1	.8	1	1	.5	1	1
a_9	1	.8	.9	1	.2	.7	.7

$\underset{\sim}{M}^*_{0.5} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	1	1	1	.5	1
a_2	1	.7	.8	.7	.5	.7	1
a_3	1	1	1	1	1	.8	1
a_4	1	1	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	.4	.6	.6
a_6	1	1	1	.5	1	.5	.5
a_7	1	.7	1	.8	.5	1	1
a_8	1	.9	1	1	.7	1	1
a_9	1	.9	1	1	.4	.7	.7

$\underset{\sim}{M}^*_{0.4} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	1	1	1	.6	1
a_2	1	1	.9	1	.7	.8	1
a_3	1	1	1	1	1	1	1
a_4	1	1	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	.7	.8	.8
a_6	1	1	1	.7	1	.6	.6
a_7	1	.9	1	.9	.7	1	1
a_8	1	1	1	1	.7	1	1
a_9	1	1	1	1	.5	.9	.9

$\underset{\sim}{M}^*_{0.3} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	1	1	1	.6	1
a_2	1	1	.9	1	.8	.8	1
a_3	1	1	1	1	1	1	1
a_4	1	1	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	.8	1	1
a_6	1	1	1	.9	1	.6	.8
a_7	1	1	1	1	.8	1	1
a_8	1	1	1	1	.9	1	1
a_9	1	1	1	1	.6	1	1

$\underset{\sim}{M}^*_{0.2} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	1	1	1	.8	1
a_2	1	1	1	1	.9	.9	1
a_3	1	1	1	1	1	1	1
a_4	1	1	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	.9	1	1
a_6	1	1	1	1	1	.8	.9
a_7	1	1	1	1	.9	1	1
a_8	1	1	1	1	1	1	1
a_9	1	1	1	1	.8	1	1

$\underset{\sim}{M}^*_{0.1} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	1	1	1	1	1	.9	1
a_2	1	1	1	1	.9	1	1
a_3	1	1	1	1	1	1	1
a_4	1	1	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	1	1	1
a_6	1	1	1	1	1	.8	1
a_7	1	1	1	1	.9	1	1
a_8	1	1	1	1	1	1	1
a_9	1	1	1	1	1	1	1

Все элементы матрицы $\underset{\sim}{M}^*_0$ равны единице.

После получения накопленных следствий первого и второго порядков найдем скрытые воздействия с учетом обобщения мнений экспертов. Для этого можно выбрать несколько путей, которые, хотя и приведут к разным числовым результатам, совпадут качественно.

В нашем случае воспользуемся простым методом, обоснованным в § 11. По данным из матриц $\underset{\sim}{M}_\alpha$ и $\underset{\sim}{M}^*_\alpha$, $\alpha = 1, 0.9, \dots, 0.1$, найдем усредненные оценки для каждой клетки таких матриц. Например, из матриц $\underset{\sim}{M}_\alpha$, $\alpha = 1, 0.9, \dots, 0.1$, получим:

$\varepsilon_{\underset{\sim}{M}}(a_1, b_1) = (.1+.1+.3+.3+.6+.8+1+1+1) \ / \ 10 = 0.52$;

$\varepsilon_{\underset{\sim}{M}}(a_1, b_2) = (.1+.2+.4+.7+.7+.9+.9+1+1+1) \ / \ 10 = 0.69$;

$\varepsilon_{\underset{\sim}{M}}(a_1, b_3) = (.2+.3+.4+.4+.5+.8+.8+.9) \ / \ 10 = 0.43$

и т. д.

Из матриц $\underset{\sim}{M}^*_\alpha$, $\alpha = 1, 0.9, \dots, 0.1$, получим:

$\varepsilon_{\underset{\sim}{M}^*}(a_1, b_1) = (.6+.9+1+1+1+1+1+1+1+1) \ / \ 10 = 0.95$;

$\varepsilon_{\underset{\sim}{M}^*}(a_1, b_2) = (.6+.7+.9+.9+1+1+1+1+1+1) \ / \ 10 = 0.91$;

$\varepsilon_{\underset{\sim}{M}^*}(a_1, b_3) = (.5+.9+1+1+1+1+1+1+1+1) \ / \ 10 = 0.94$

и т. д.

Все вычисленные таким образом данные представим в виде матриц $\varepsilon(\underset{\sim}{M})$ и $\varepsilon(\underset{\sim}{M}^*)$:

$\varepsilon(\underset{\sim}{M}) =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.52	.69	.43	.27	.95	.01	.08
a_2	.54	.44	.47	.30	.38	.30	.78
a_3	.76	.50	.65	.49	.76	.33	.90
a_4	.99	.13	.83	.75	.04	.23	0
a_5	.60	.73	.45	.35	0	.06	0
a_6	.22	.62	.30	.19	.97	.01	.06
a_7	.55	.15	.38	.20	0	.92	.78
a_8	.95	.21	.91	.69	0	1	.45
a_9	.93	.65	.78	.78	0	.31	0

$\varepsilon(\underset{\sim}{M}^*) =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.95	.91	.94	.65	.95	.42	.76
a_2	.76	.58	.58	.59	.42	.52	.78
a_3	.83	.78	.80	.77	.78	.57	.90
a_4	.99	.77	.84	.94	.77	.71	.78
a_5	.82	.73	.80	.81	.42	.50	.49
a_6	.96	.91	.94	.50	.97	.38	.41
a_7	.92	.57	.92	.59	.42	.92	.80
a_8	1	.68	.95	.93	.51	1	.81
a_9	.93	.67	.79	.92	.37	.65	.65

Теперь уже мы в состоянии выделять скрытые воздействия. Для этого достаточно осуществить вычитание $\varepsilon(\underset{\sim}{M}^*)$ $-\varepsilon(\underset{\sim}{M})$, поскольку по построению $\varepsilon(\underset{\sim}{M}^*) \geq \varepsilon(\underset{\sim}{M})$:

$\varepsilon(\underset{\sim}{M}^*) - \varepsilon(\underset{\sim}{M}) =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.43	.22	.51	.38	0	.41	.68
a_2	.22	.14	.11	.29	.04	.22	0
a_3	.07	.28	.15	.28	.02	.24	0
a_4	0	.64	.01	.19	.73	.48	.78
a_5	.22	0	.35	.46	.42	.44	.49
a_6	.74	.29	.64	.31	0	.37	.35
a_7	.37	.42	.54	.39	.42	0	.02
a_8	.05	.47	.04	.24	.51	0	.36
a_9	0	.02	.01	.14	.37	.34	.65

Элементы этой разности позволяют оценить степень скрытых воздействий. В ней выделены наиболее высокие оценки (клетки (a_4,b_7), (a_6,b_1), (a_4,b_5), (a_1,b_7), (a_6,b_3)).

При необходимости можно рассматривать и еще меньшие значения оценок, например для нахождения новых косвенных инциденций, если это вызывается конкретными обстоятельствами.

Для более детального анализа также можно для всех $\alpha = 1, 0.9, 0.8,$ ... , 0.1 из матрицы $\underset{\sim}{M}^*_\alpha$, содержащих накопленные следствия первого и второго порядков, вычесть матрицу $\underset{\sim}{M}_\alpha$, содержащую только следствия, представленные экспертами. Для нашего примера получим следующие разности:

$\underset{\sim}{M}^*_1 - \underset{\sim}{M}_1 =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.6	.5	.5	0	0	0	.1
a_2	.1	0	0	0	0	0	0
a_3	.2	.1	.1	0	0	0	0
a_4	0	.2	0	.7	.2	0	.1
a_5	.2	0	.1	.2	0	0	0
a_6	.7	.6	.5	0	0	0	0
a_7	.6	0	.6	0	0	0	.1
a_8	.3	0	.1	.7	0	0	.2
a_9	0	0	.1	.6	0	0	0

$\underset{\sim}{M}^*_{0.9} - \underset{\sim}{M}_{0.9} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.8	.5	.9	.1	0	0	.3
a_2	.2	0	.1	.1	0	.1	0
a_3	.1	.2	0	.3	0	0	0
a_4	0	.4	.1	.6	.4	0	.4
a_5	.4	0	.4	.5	0	0	0
a_6	.9	.6	.9	0	0	0	0
a_7	.7	0	.7	0	0	0	.1
a_8	.2	.1	.2	.8	0	0	.2
a_9	0	0	0	.4	0	.2	.2

$\underset{\sim}{M}^*_{0.8} - \underset{\sim}{M}_{0.8} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.9	.5	.8	.3	0	.2	.6
a_2	.6	.1	0	.1	0	.1	0
a_3	.2	.6	.4	.5	0	0	0
a_4	0	.5	0	.3	.5	.6	.7
a_5	.5	0	.6	.6	0	0	0
a_6	1	.6	1	.2	0	0	0
a_7	.7	.2	.9	.2	0	0	0
a_8	0	.4	.1	.5	.1	0	.4
a_9	0	0	0	.1	0	.4	.4

$\underset{\sim}{M}^*_{0.7} - \underset{\sim}{M}_{0.7} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.7	.2	.7	.4	0	.2	.7
a_2	.6	.1	.1	.2	.2	.2	0
a_3	.2	.5	.2	.6	0	0	0
a_4	0	.8	0	.2	.8	.7	.7
a_5	.8	0	.8	.9	.2	.2	.1
a_6	1	.4	1	.2	0	.1	0
a_7	.6	.4	.9	.4	.2	0	0
a_8	0	.6	0	.4	.2	0	.5
a_9	0	0	0	.1	.2	.6	.6

$\underset{\sim}{M}^*_{0.6} - \underset{\sim}{M}_{0.6} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.7	.3	.6	.7	0	.4	.9
a_2	.4	.2	.3	.6	.2	.3	0
a_3	0	.3	.3	.5	0	.3	0
a_4	0	.8	0	.1	.8	.6	.9
a_5	.3	0	.7	.7	.2	.4	.4
a_6	1	.3	.8	.5	0	.4	.3
a_7	.5	.5	.7	.6	.2	0	0
a_8	0	.7	0	0	.5	0	.5
a_9	0	0	0	.1	.2	.3	.7

$\underset{\sim}{M}^*_{0.5} - \underset{\sim}{M}_{0.5} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.4	.1	.6	.9	0	.5	1
a_2	.3	.1	.3	.6	0	.3	0
a_3	0	.4	.3	.4	.1	.5	0
a_4	0	1	0	0	1	.8	1
a_5	0	0	.4	.6	.4	.6	.6
a_6	1	.3	.7	.4	0	.5	.5
a_7	.4	.7	.5	.7	.5	0	0
a_8	0	.8	0	0	.7	0	.5
a_9	0	.1	0	.1	.4	.3	.7

$\underset{\sim}{M}^*_{0.4} - \underset{\sim}{M}_{0.4} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	.2	.1	.5	.7	0	.6	.9
a_2	0	.3	.3	.6	0	.4	0
a_3	0	.3	.1	.4	.1	.5	0
a_4	0	1	0	0	1	.7	1
a_5	0	0	.4	.5	.7	.7	.8
a_6	.9	.1	.6	.5	0	.6	.6
a_7	.2	.8	.5	.8	.7	0	0
a_8	0	.9	0	0	.7	0	.4
a_9	0	.1	0	0	.5	.4	.9

$\underset{\sim}{M}^*_{0.3} - \underset{\sim}{M}_{0.3} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	0	0	.2	.5	0	.6	.8
a_2	0	.3	0	.5	0	.3	0
a_3	0	.3	.1	.1	0	.5	0
a_4	0	1	0	0	1	.6	1
a_5	0	0	.1	.5	.8	.9	1
a_6	.7	0	.5	.6	0	.6	.6
a_7	0	.8	.4	.6	.8	0	0
a_8	0	.6	0	0	.9	0	.4
a_9	0	0	0	0	.6	.5	1

$\underset{\sim}{M}^*_{0.2} - \underset{\sim}{M}_{0.2} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	0	0	.2	.2	0	.8	.8
a_2	0	.2	0	.2	0	.3	0
a_3	0	.1	0	0	0	.4	0
a_4	0	.5	0	0	1	.5	1
a_5	0	0	0	.1	.9	.9	1
a_6	.2	0	.3	.5	0	.8	.7
a_7	0	.5	.2	.5	.9	0	0
a_8	0	.3	0	0	1	0	.3
a_9	0	0	0	0	.8	.4	1

$\underset{\sim}{M}^*_{0.1} - \underset{\sim}{M}_{0.1} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
a_1	0	0	.1	0	0	.8	.7
a_2	0	.1	0	0	0	.2	0
a_3	0	0	0	0	0	.2	0
a_4	0	.2	0	0	.6	.3	1
a_5	0	0	0	0	1	.7	1
a_6	0	0	.1	.2	0	.7	.8
a_7	0	.3	0	.1	.9	0	0
a_8	0	.3	0	0	1	0	.2
a_9	0	0	0	0	1	.3	1

При этом для наиболее высоких уровней инциденций α=1, α=0.9, α=0.8, α=0.7 появляются наиболее значительные скрытые воздействия. Так, для уровня α= 1: $(a_4,b_4) \to 0.7$, $(a_6,b_1) \to 0.7$, $(a_8,b_4) \to 0.7$; для уровня α=0.9 : $(a_1,b_3) \to 0.9$, $(a_6,b_1) \to 0.9$, $(a_6,b_3) \to 0.9$; для уровня α=0.8 : $(a_6,b_1) \to 1$, $(a_6,b_3) \to 1$; для уровня α=0.7: $(a_6,b_1) \to 1$, $(a_6,b_3) \to 1$.

Отсюда делаем вывод о том, что существуют скрытые воздействия в (a_6,b_1), т. е. имеется инциденция создания или улучшения работы лабораторий на увеличение числа продаж. Как уже отмечалось, подобная инциденция также проявляется при анализе матрицы $\varepsilon(\underset{\sim}{M}^*)$ -$\varepsilon(\underset{\sim}{M})$. Это еще раз подчеркивает необходимость учета данной инциденции при принятии решений.

Рассмотрим еще одну инциденцию, а именно: влияние создания или улучшения работы лабораторий на конкурентоспособность $((a_6,b_3))$, которая проявляется в разностях $\underset{\sim}{M}^*_\alpha$ - $\underset{\sim}{M}_\alpha$ при уровнях α=0.9, α=0.8 и α=0.7. В матрице $\varepsilon(\underset{\sim}{M}^*)$ -$\varepsilon(\underset{\sim}{M})$ соответствующая ей оценка также достаточно велика (равна 0.64). Это тоже одно из скрытых воздействий.

Другие скрытые воздействия, такие как (a_4,b_4) (влияние производства новых товаров на изменение рыночной квоты) и (a_1,b_3) (влияние модернизации оборудования на конкурентоспособность), проявляющиеся соответственно на уровнях α=1 и α=0.9, на других уровнях не выделяются.

В то же время существуют некоторые воздействия, не проявляющиеся на высоких уровнях в матрицах $\underset{\sim}{M}^*_\alpha$ - $\underset{\sim}{M}_\alpha$ Например, инциденции (a_4,b_5) (влияние производства новых товаров на качество товаров) и (a_4,b_7) (влияние ответственности при поставках на качество товаров) обнаруживаются на матрице $\varepsilon(\underset{\sim}{M}^*)$ -$\varepsilon(\underset{\sim}{M})$ с оценками 0.73 и 0.78 соответственно. Судя по матрицам $\underset{\sim}{M}_\alpha$, эксперты, давая свои оценки, практически не учли инциденцию (a_4,b_5) и полностью забыли об инциденции (a_4,b_7). Оба этих причинно-следственных отношения все же сильно проявляются и на матрицах $\underset{\sim}{M}_\alpha$, начиная с уровней 0.7 и 0.8 соответственно.

Таким образом, оба приема, применяемые нами, дополняют друг друга. Используя их, можно рассматривать в качестве важнейших скрытых воздействий инциденции (a_6,b_1) и (a_6,b_3) и для них восстанавливать промежуточные причины. При разных уровнях α это могут быть различные пути или оценки инциденций. Так, для инциденции a_6 на b_1 это могут быть следующие пути: уровень α=1: $a_6 \xrightarrow{1} a_6 \xrightarrow{.7} b_5 \xrightarrow{.8} b_1$; уровень α=0.9: $a_6 \xrightarrow{1} a_6 \xrightarrow{1} b_5 \xrightarrow{.9} b_1$,; уровень α=0.8 : $a_6 \xrightarrow{1} a_6 \xrightarrow{1} b_5 \xrightarrow{1} b_1$.

Отсюда делается выводе о наличии важной инциденции создания или улучшения работы лабораторий на рост числа продаж через качество изделий. Это воздействие как раз и было забыто экспертами.

Для инциденции a_6 на b_3 восстанавливаются следующие пути : уровень α=1 : $a_6 \xrightarrow{1} a_6 \xrightarrow{.7} b_5 \xrightarrow{.5} b_3$; уровень α=0.9: $a_6 \xrightarrow{1} a_6 \xrightarrow{1} b_5 \xrightarrow{.9} b_3$; уровень α=0.8 : $a_6 \xrightarrow{1} a_6 \xrightarrow{1} b_5 \xrightarrow{1} b_3$.

Таким образом, инциденция создания или улучшения работы лабораторий на конкурентоспособность считается у большинства экспертов очень высокой, как только они начинают учитывать косвенное воздействие через качество изделий. Повторное появление качества изделий как элемента промежуточного воздействия обосновывается признаваемой экспертами важностью этого фактора для роста цен, числа продаж и для конкурентоспособности, что подтверждается матрицами $\underset{\sim}{B}^{(j)}$, j=1,2,...,10. Анализ полученных результатов может быть расширен, поскольку тема коммерческого имиджа предприятия очень интересна. Однако, мы предпочитаем закончить на этом, предоставляя читателю широкие возможности для исследования в области случайных нечетких отношений.

17. Восстановление скрытых воздействий при определении целей предприятия

При осуществлении своей деятельности предприятие преследует определенные цели, изучение которых привело к созданию целого ряда исследований, часто выходящих за рамки проблем управления. Затрагивая эту тему, мы не пытаемся увеличить число существующих по данному вопросу работ и при описании своего подхода исходим из предположения, что эти цели многообразны и уже поставлены.

Мы считаем, что действия предпринимателя направлены не только на получение максимальной прибыли или обогащение владельцев предприятия, но преследуют и другие цели,как равные указанным по значимости, так и второстепенные и даже промежуточные. В любом случае все они известны акционерам.

Не претендуя на исчерпывающее перечисление и ориентируясь только на применение наших подходов, предположим, что поставлены следующие цели:

1) первостепенные: увеличение стоимости предприятия; рост котировки акций; стабильность экономического положения;

2) второстепенные: повышение общественно-политической значимости; укрепление престижа на рынке; укрепление позиции среди предприятий;

3) промежуточные: облегчение получения кредитов; расширение рынка сбыта.

С другой стороны, существует совокупность элементов, которые могут оказывать определенные инциденции на эти цели. Полное их перечисление вряд ли осуществимо, поэтому мы выделим лишь некоторые из этих элементов так, чтобы они принадлежали разным сферам предпринимательской деятельности:

1) экономико-финансовый аспект: ежегодная прибыль; ведение счетов; степень ликвидности;

2) трудовой аспект: число рабочих; деятельность профсоюза;

3) производственный аспект: уровень торговых запасов; степень технологичности;

4) коммерческий аспект: ассортимент товаров на рынке; качество и вид представления товаров;

5) аспект управления и координации: руководящий персонал.

Список перечисленных элементов можно изменить, расширить или перегруппировать, однако это не повлияет на предлагаемый ниже метод.

Перейдем теперь к оценкам причинно-следственных отношений, имея в виду, что следствиями являются вышеперечисленные цели предприятия, а причинами - приведенные элементы, влияющие на эти цели. Для сокращения дальнейших записей в виде матриц введем следующие обозначения. Пусть элемент "ежегодная прибыль" обозначается через a_1, "ведение счетов" - a_2, "степень ликвидности" - a_3, "число рабочих" - a_4, "деятельность профсоюза" - a_5, "уровень торговых запасов" - a_6, "руководящий персонал" - a_7, "степень технологичности" - a_8, "ассортимент товаров" - a_9, "качество товаров" - a_{10}. Пусть также цель предприятия "стоимость компании" обозначается через b_1, "котировка акций" - b_2, "получение кредитов" - b_3, "престиж на рынке" - b_4, "расширение рынка сбыта" - b_5, "соглашения между компаниями" - b_6, "стабильность" - b_7, "общественно - политическая значимость" - b_8.

Поручаем десяти экспертам независимо друг от друга оценить влияние каждой из причин a_i, $i = 1,2,...,10$, на следствие b_k, $k = 1,2, ...,7$. Мы понимаем, что такое количество экспертов не обеспечивает получение обоснованных вероятностных оценок и дальнейшее использование вероятностных методов, но для наших схем этого количества достаточно, более того, число 10 упрощает разнообразные нижеприведенные расчеты. Каждому эксперту разрешено давать оценки инциденций в виде доверительных интервалов так, чтобы левые и правые их границы были числами из множества $\{0,0.1,0.2,...,0.9,1\}$.

Результаты таких экспертиз приведены в десяти Ф-нечетких матрицах $\underset{\sim}{M}^{(j)}$, $j = 1,2,...,10$:

$\underset{\sim}{M}^{(1)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	1	[.8,.9]	[.6,.8]	[.4,.5]	[.3,.5]	[.1,.3]	[.8,.9]	[.3,.6]
a_2	[.1,.2]	[.2,.3]	[.4,.6]	[.6,.9]	[.2,.6]	[.3,.5]	[.5,.7]	.1
a_3	[.2,.4]	.1	1	[.2,.3]	0	[.1,.3]	[.6,.9]	[.3,.4]
a_4	[.1,.4]	0	.2	[.3,.5]	[.1,.2]	.1	[.4,.5]	1
a_5	[.4,.8]	.2	[.3,.5]	0	[.1,.3]	[.4,.6]	.9	1
a_6	[.3,.5]	0	[.6,.7]	0	[.4,.8]	0	[.3,.6]	0
a_7	0	0	[.4,.6]	[.5,.8]	[.8,1]	[.4,.5]	[.6,.9]	[.7,1]
a_8	[.3,.5]	0	[.2,.3]	[.4,.6]	0	0	[.8,1]	0
a_9	0	0	0	[.6,.8]	[.7,.9]	[.6,.7]	.9	0
a_{10}	0	0	0	1	1	[.6,.7]	.9	0

$\underset{\sim}{M}^{(2)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	1	1	[.8,.9]	[.4,.5]	[.3,.6]	.2	[.8,.9]	[.4,.6]
a_2	[.3,.4]	[.2,.3]	[.5,.7]	[.3,.4]	.2	[0,.4]	[.6,.8]	0
a_3	.1	0	1	[.6,.8]	[.4,.5]	[.2,.4]	.8	[.4,.5]
a_4	0	0	0	[.3,.4]	[.4,.8]	.1	[.6,.7]	1
a_5	[.3,.4]	0	[.5,.6]	0	0	[.2,.3]	[.4,.7]	1
a_6	.5	0	.8	[.1,.2]	[.4,.6]	0	[.2,.3]	0
a_7	[.4,.8]	.2	[.8,.9]	[.7,.9]	[.6,.8]	[.4,.5]	[.7,1]	[.8,.9]
a_8	[.6,.7]	0	[.4,.5]	[.7,.9]	.1	0	[.6,.8]	0
a_9	0	0	[.1,.4]	[.6,.7]	1	0	[.6,.9]	0
a_{10}	0	0	0	1	1	[.4,.5]	.9	0

$M^{(3)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	.9	.9	1	[.3,.4]	[.6,.7]	[.3,.4]	1	[.7,.9]
a_2	[.1,.2]	[.1,.2]	[.4,.6]	[.4,.5]	[.4,.6]	[.1,.3]	[.4,.6]	.1
a_3	[.2,.3]	0	[.6,.8]	[.6,.8]	[.5,.7]	[.4,.5]	1	[.6,.7]
a_4	[.3,.5]	0	[.1,.3]	0	[.4,.6]	[.6,.8]	[.3,.7]	1
a_5	[.4,.5]	0	0	0	0	[.3,.6]	.9	1
a_6	[.2,.3]	0	[.5,.7]	[.4,.5]	[.6,.7]	[.3,.5]	[.4,.7]	0
a_7	[.5,.8]	[.1,.3]	.9	[.6,.8]	.9	[.3,.7]	.9	[.8,.9]
a_8	[.3,.6]	0	[.1,.3]	[.6,.7]	[.8,.9]	[.4,.6]	1	.1
a_9	0	0	0	1	1	[.5,.6]	.8	0
a_{10}	0	0	0	1	1	[.3,.7]	1	0

$M^{(4)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	1	.8	1	[.4,.7]	[.7,.8]	[.6,.8]	1	.5
a_2	[.2,.3]		[.4,.6]	[.5,.7]	[.4,.5]	.2	[.2,.6]	.1
a_3	[.3,.4]	0	[.5,.7]	[.4,.6]	.2	0	[.6,.8]	[.5,.7]
a_4	0	0	0	[.2,.5]	[.3,.5]	[.2,.5]	[.7,.8]	.9
a_5	0	0	0	[.3,.5]	0	[.2,.3]	[.7,.8]	1
a_6	.1	0	[.4,.6]	[.2,.4]	[.5,.7]	0	.9	0
a_7	[.6,.8]	0	[.5,.7]	[.8,.9]	[.6,.8]	[.4,.5]	1	.9
a_8	[.4,.6]	0	[.1,.2]	[.7,.8]	[.6,.8]	[.3,.4]	1	0
a_9	0	0	0	1	1	0	[.7,.9]	0
a_{10}	0	0	.1	1	[.8,.9]	[.4,.5]	1	0

$M^{(5)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	1	.9	[.7,.9]	[.5,.6]	[.5,.7]	[.3,.4]	1	[.4,.6]
a_2	0	0	[.2,.6]	[.4,.6]	[.3,.6]	[.2,.5]	[.6,.8]	0
a_3	[.4,.5]	[.2,.3]	[.6,.8]	[.6,.7]	[.5,.7]	.1	[.8,1]	[.4,.5]
a_4	.2	0	[.1,.3]	[.5,.6]	[.5,.7]	.1	[.6,.8]	1
a_5	0	0	0	[.3,.6]	0	0	[.4,.7]	1
a_6	.1	0	[.4,.6]	[.5,.7]	[.8,.9]	0	[.5,.6]	0
a_7	[.6,.7]	0	[.4,.5]	[.7,.8]	[.6,.8]	[.2,.5]	.8	.8
a_8	[.5,.7]	0	[.4,.7]	.8	[.5,.8]	[.1,.3]	1	0
a_9	0	0	.1	1	1	[.3,.6]	1	0
a_{10}	0	0	0	1	1	[.3,.6]	1	0

$M^{(6)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	1	.9	[.7,.8]	[.4,.5]	[.6,.8]	.2	1	[.3,.5]
a_2	0	0	[.5,.6]	[.3,.5]	[.2,.4]	[.3,.5]	[.6,.7]	0
a_3	[.4,.6]	0	[.7,.8]	[.6,.7]	[.5,.6]	[.4,.6]	1	[.5,.6]
a_4	0	0	0	0	[.4,.6]	[.3,.6]	[.6,.8]	[.7,.9]
a_5	0	0	0	[.4,.7]	0	.1	[.5,.6]	1
a_6	[.3,.4]	0	[.6,.7]	[.4,.6]	[.6,.8]	.1	[.4,.5]	0
a_7	[.5,.7]	0	[.5,.7]	[.8,1]	[.9,1]	[.4,.5]	.9	1
a_8	[.5,.7]	0	[.6,.8]	1	[.4,.7]	[.2,.4]	1	0
a_9	0	0	0	1	1	[.6,.7]	.9	0
a_{10}	0	0	0	1	1	[.6,.7]	1	0

$M^{(7)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	1	[.8,.9]	[.6,.7]	[.3,.5]	[.6,.8]	[.2,.4]	1	[.6,.7]
a_2	0	0	[.6,.8]	[.4,.7]	[.3,.5]	.1	[.4,.5]	0
a_3	[.3,.6]	0	[.7,.9]	[.4,.7]	[.5,.6]	.1	1	[.3,.5]
a_4	0	0	0	[.2,.3]	[.4,.6]	[.4,.6]	[.7,.9]	.8
a_5	0	0	0	[.2,.4]	.1	[.5,.6]	[.6,.7]	1
a_6	[.1,.2]	0	[.4,.6]	[.3,.5]	[.6,.8]	0	[.6,.8]	0
a_7	[.4,.7]	0	[.6,.7]	[.4,.7]	[.6,.7]	[.4,.8]	1	[.6,.9]
a_8	[.3,.6]	0	[.6,.7]	.8	[.3,.4]	[.2,.4]	1	0
a_9	0	0	[.1,.3]	1	1	[.2,.5]	[.8,.9]	0
a_{10}	0	0	[.1,.3]	1	1	[.2,.6]	.9	0

$M^{(8)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	.9	.9	1	[.3,.5]	[.5,.7]	[.1,.3]	1	[.5,.7]
a_2	0	0	[.6,.8]	[.5,.7]	[.1,.4]	0	[.4,.6]	0
a_3	[.6,.7]	0	[.7,.9]	[.2,.3]	[.4,.6]	.1	[.9,1]	[.6,.7]
a_4	0	0	.1	0	[.3,.5]	[.2,.5]	[.4,.7]	[.8,.1]
a_5	0	0	0	.1	0	[.1,.3]	[.4,.6]	1
a_6	0	0	[.6,.8]	[.5,.7]	[.4,.7]	[.3,.6]	[.4,.7]	0
a_7	[.5,.7]	0	[.6,.8]	[.5,.8]	[.5,.7]	[.4,.6]	.9	[.7,.9]
a_8	[.4,.7]	0	[.5,.7]	[.4,.6]	[.3,.4]	.1	[.8,.1]	0
a_9	0	0	[.3,.4]	1	1	[.4,.7]	1	0
a_{10}	0	0	0	1	1	[.4,.7]	1	0

$\underset{\sim}{M}^{(9)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	[.8,.9]	.9	1	[.3,.5]	[.4,.7]	.2	1	[.4,.6]
a_2	.1	0	[.3,.4]	[.4,.6]	[.2,.5]	.1	[.2,.3]	0
a_3	[.6,.8]	.2	[.6,.8]	[.6,.8]	[.3,.5]	.1	[.7,.9]	.2
a_4	.1	0	[.3,.4]	0	[.5,.6]	[.4,.7]	.5	1
a_5	0	0	0	0	[.2,.4]	[.3,.6]	[.6,.8]	1
a_6	.2	0	[.7,.8]	[.8,.9]	[.6,.7]	0	[.2,.3]	0
a_7	[.4,.6]	0	[.6,.7]	[.4,.7]	.8	[.6,.8]	.9	[.8,.9]
a_8	[.2,.3]	0	[.3,.4]	[.3,.6]	[.5,.7]	[.3,.5]	1	.1
a_9	0	0	[.3,.4]	1	1	[.5,.6]	1	0
a_{10}	0	0	[.4,.5]	1	1	[.6,.8]	1	0

$\underset{\sim}{M}^{(10)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	1	.8	[.7,.9]	.2	[.4,.7]	[.3,.4]	1	[.5,.7]
a_2	[.1,.2]	0	[.6,.8]	[.5,.7]	.1	0	[.4,.6]	0
a_3	[.6,.8]	.2	1	[.6,.7]	[.5,.6]	.2	1	[.4,.6]
a_4	.3	0	.1	.1	[.5,.7]	0	[.6,.8]	.9
a_5	.1	0	[.2,.4]	0	0	[.3,.4]	[.5,.7]	1
a_6	.1	0	[.6,.8]	[.5,.6]	[.6,.8]	[.3,.5]	[.2,.5]	0
a_7	[.4,.6]	.1	[.4,.7]	[.2,.4]	[.5,.6]	[.4,.5]	[.7,.9]	[.6,.8]
a_8	[.3,.5]	0	[.6,.7]	[.1,.3]	[.3,.5]	[.2,.4]	1	0
a_9	0	0	[.2,.4]	1	1	[.5,.7]	1	0
a_{10}	0	0	0	1	1	[.6,.7]	1	0

На основании матриц $\underset{\sim}{M}^{(j)}$ составляется табл. 17.1, в которой собрана статистика встречаемости каждой оценки из {0,0.1,...,0.9,1} для каждой пары (a_i,b_k), где $i = 1,2,...,10$; $k = 1,2,...,8$, для левых и правых границ интервалов достоверности.

Сейчас можно построить таблицу, в которой отражены накопленные вероятности для левых и правых границ, как это было сделано в (10.3), т. е. составить матрицу инциденций по экспертонам. Однако мы используем также путь, аналогичный обработке случайных нечетких матриц в предыдущем параграфе, где для упрощения использована методика непосредственного получения средних. Очевидно, что этот способ не слишком обоснован, поскольку операция maxmin не является линейной. Однако мы убедимся, что можно добиться достаточно хорошего приближения, основываясь на содержательном смысле отношений.

Т а б л и ц а 17.1

		b_1		b_2		b_3		b_4		b_5		b_6		b_7		b_8	
a_1	0																
	.1											2					
	.2							1	1			4	3				
	.3							4		2		3	2			2	
	.4							4	1	2			4			3	
	.5							1	6	2	1					3	2
	.6					2			1	3	1	1				1	4
	.7					3	1		1	1	5					1	3
	.8	1		4	2	1	2				3		1	2			
	.9	2	3	5	7		3								2		1
	1	7	7	1	1	4	4							8	8		
a_2	0	4	4	7	7							3	2			7	7
	.1	4	1	1						2	1	3	2			3	3
	.2	1	3	2	1	1				4	1	2	1	2			
	.3	1	1		2	1		2		2		2	1		1		
	.4		1			3	1	4	1	2	2		1	4			
	.5					2		3	2		3		3	1	1		
	.6					3	5	1	2		3			3	4		
	.7						1		4						2		
	.8						3								2		
	.9								1								
	1																
a_3	0			6	6					1	1	1	1				
	.1	1	1	1	1							5	4				
	.2	2		3	2			2		1	1	2	1			1	1
	.3	2	1		1				2	1			1			2	
	.4	2	2					2		2		2	1			3	1
	.5		1			1				5	2		1			2	3
	.6	3	2			3		6	1		4		1	2		2	2
	.7		1			3	1		4		2			1			3
	.8		2				4		3					2	2		
	.9						2							1	2		
	1					3	3							4	6		
a_4	0	5	5	10	10	4	4	4	4			1	1				
	.1	2	1			4	2	1	1	1		3	3				
	.2	1	1			1	1	2			1	2					
	.3	2	1			1	2	2	1	2		1		1			
	.4		1				1		1	4		2		2			
	.5		1					1	2	3	2		2	1	2		
	.6								1		4	1	2	4			
	.7										2		1	2	3	1	
	.8										1		1		4	2	1
	.9														1	2	3
	1															5	6
a_5	0	6	6	9	9	7	7	5	5	7	7	1	1				
	.1	1	1					1	1	2	1	2	1				
	.2			1	1	1		1		1		2					
	.3	1				1		2			1	3	3				
	.4	2	1				1	1	1		1	1	1	3			
	.5		1			1	1		1			1		2			
	.6						1		1				4	2	2		
	.7								1					1	4		
	.8		1												2		
	.9													2	2		
	1															10	10

Окончание табл. 17.1

		b_1		b_2		b_3		b_4		b_5		b_6		b_7		b_8	
	0	1	1	10	10			1	1			6	6			10	10
	.1	4	3					1				1	1				
	.2	2	2					1	1					3			
	.3	2	1					1				3		1	2		
	.4		1			3		2	1	3				3			
a_6	.5	1	2			1	.	3	2	1			2	1	2		
	.6					4	3		2	5	1		1	1	2		
	.7					1	3		2		4				2		
	.8					1	4	1		1	4				1		
	.9								1		1			1	1		
	1																
	0	1	1	7	7												
	.1			2	1												
	.2			1	1			1				1					
	.3				1							1					
	.4	4				3		2	1			7					
	.5	3				2	1	2		2			6				
a_7	.6	2	2			3	1	1		4	1	1	1	1		2	
	.7		4				5	2	2		2		1	2		2	
	.8		3			1	1	2	4	2	4		2	1	1	4	2
	.9					1	2		2	2	1			4	6	1	6
	1								1		2			2	3	1	2
	0			10	10					1	1	2	2			8	8
	.1					2		1		1	1	2	1			2	2
	.2	1				1	1					3					
	.3	4	1			1	2	1	1	3		2	1				
	.4	2				2	1	2		1	2	1	4				
	.5	2	2			1·	1			2	1		1				
a_8	.6	1	3			3		1	3	1			1	1			
	.7		4				4	2	1		2						
	.8						1	2	3	1	2			2	1		
	.9								1		1						
	1							1	1					7	9		
	0	10	10	10	10	4	4					2	2			10	10
	.1					3	1										
	.2					1						1					
	.3					2	1					1					
	.4						4					1					
	.5											3	1				
a_9	.6							2				2	3	1			
	.7								1	1			4	1			
	.8								1					2	1		
	.9										1			2	5		
	1							8	8	9	9			4	4		
	0	10	10	10	10	7	7									10	10
	.1					2	1										
	.2											1					
a_{10}	.3						1					2					
	.4					1						3					
	.5						1						2				
	.6											4	2				
	.7												5				
	.8									1			1				
	.9										1			3	3		
	1							10	10	9	9			7	7		

При любом подходе далее следует запросить у тех же экспертов и при тех же условиях мнения относительно оценок еще одного вида инциденций, а именно: инциденций множества причин из матриц $\underset{\sim}{M}^{(j)}$ на себя. Таким образом, каждый j- й эксперт, j = 1,2,...,10, должен составить Ф-нечеткую матрицу $\underset{\sim}{A}^{(j)}$, в клетках (a_i,a_k) которой в виде доверительных интервалов будут стоять оценки инциденций элементов a_i на элементы a_k, i,k=1,2,...,10. Эти десять новых матриц имеют вид:

$\underset{\sim}{A}^{(1)}$ =

1	0	[.7,.8]	.1	[.6,.8]	[.4,.6]	[.4,.6]	[.6,.8]	[.2,.4]	0
1	1	1	[.6,.7]	[.3,.5]	.8	0	[.5,.7]	.1	.1
[.2,.4]	0	1	0	0	[.6,.7]	0	[.6,.8]	0	0
[.5,.7]	[.5,.7]	.2	1	1	0	[.6,.8]	[.1,.4]	0	[.4,.5]
[.6,.8]	.2	[.1,.3]	[.2,.4]	1	0	[.2,.4]	.2	0	[.3,.6]
[.5,.7]	.8	[.6,.8]	0	0	1	0	0	[.6,.7]	[.2,.4]
1	1	[.5,.7]	[.6,.8]	[.4,.7]	[.4,.5]	1	[.8,.9]	[.8,.9]	[.8,.9]
[.7,.9]	[.7,.9]	.1	1	[.6,.8]	[.7,.9]	0	1	[.6,.8]	1
1	1	[.4,.6]	[.8,.9]	0	1	0	[.4,.7]	1	0
1	1	.3	[.2,.3]	0	[.5,.7]	0	[.2,.5]	0	1

$\underset{\sim}{A}^{(2)}$ =

1	0	1	0	[.7,.8]	[.2,.4]	[.3,.6]	[.6,.8]	[.4,.6]	.3
1	1	[.7,.9]	.9	[.1,.3]	[.7,.9]	0	[.4,.6]	0	0
[.2,.5]	0	1	0	[.3,.6]	[.7,.8]	0	[.3,.5]	[.5,.7]	[.3,.6]
[.6,.8]	[.7,.8]	[.3,.5]	1	1	[.2,.4]	[.2,.5]	0	.1	0
[.5,.7]	[.5,.6]	0	[.6,.8]	1	0	[.4,.7]	.1	.1	0
[.4,.6]	[.4,.6]	[.6,.8]	0	0	1	0	0	[.3,.5]	0
[.8,.9]	[.8,.9]	[.5,.7]	[.6,.8]	[.4,.6]	[.4,.6]	1	.9	1	1
[.7,.8]	[.5,.7]	0	1	[.6,.8]	[.6,.8]	[.2,.5]	1	[.4,.6]	1
1	1	[.3,.5]	[.4,.7]	0	1	0	0	1	0
1	1	[.7,.9]	[.7,.9]	0	[.6,.8]	0	0	0	1

$\underset{\sim}{A}^{(3)}$ =

1	[.2,.4]	1	0	[.3,.5]	.1	0	[.6,.8]	[.2,.4]	[.2,.4]
1	1	[.6,.8]	1	0	[.6,.8]	[.2,.5]	[.4,.8]	0	0
[.4,.6]	0	1	0	[.2,.4]	[.4,.7]	0	[.6,.8]	0	0
[.4,.6]	[.3,.6]	[.2,.4]	1	1	.2	[.5,.7]	0	0	0
[.6,.7]	[.6,.7]	[.1,.3]	[.6,.8]	1	0	[.5,.7]	[.2,.3]	0	0
[.7,.8]	[.4,.6]	[.7,.8]	0	0	1	0	0	[.5,.7]	.1
[.7,.9]	1	[.7,.9]	[.7,.8]	.2	[.7,.9]	1	1	1	1
[.6,.8]	[.6,.8]	[.2,.3]	1	.1	[.4,.6]	[.6,.8]	1	[.2,.4]	1
1	1	[.4,.6]	[.6,.7]	0	1	0	0	1	0
1	1	[.4,.7]	[.2,.4]	0	0	0	[.2,.5]	0	1

$$\underset{\sim}{A}^{(4)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
1 & .2 & [.6,.8] & 0 & [.4,.7] & [.5,.7] & 0 & [.7,.9] & [.1,.3] & [.1,.3] \\ \hline
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & [.7,.9] & 0 & [.2,.4] \\ \hline
[.4,.6] & 0 & 1 & 0 & .1 & [.6,.7] & 0 & .1 & 0 & 0 \\ \hline
[.5,.7] & [.4,.7] & [.3,.5] & 1 & 1 & 0 & [.2,.5] & 0 & 0 & 0 \\ \hline
[.3,.5] & [.5,.7] & 0 & [.2,.4] & 1 & 0 & [.2,.3] & 0 & 0 & 0 \\ \hline
[.2,.4] & [.3,.5] & [.8,.9] & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & [.2,.4] & 0 \\ \hline
1 & 1 & [.4,.6] & [.2,.4] & [.4,.8] & [.5,.7] & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
[.4,.6] & [.3,.5] & .1 & 1 & [.4,.6] & .9 & [.4,.7] & 1 & [.4,.7] & 1 \\ \hline
1 & 1 & [.2,.5] & [.6,.8] & 0 & 1 & 0 & [.2,.4] & 1 & 0 \\ \hline
1 & 1 & [.4,.6] & [.3,.5] & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline
\end{array}$$

$$\underset{\sim}{A}^{(5)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
1 & [.3,.4] & [.4,.6] & 0 & .1 & [.4,.6] & 0 & [.4,.6] & .4 & .2 \\ \hline
1 & 1 & 1 & [.7,.9] & 0 & 1 & 0 & .8 & 0 & 0 \\ \hline
[.5,.7] & 0 & 1 & 0 & 0 & [.6,.8] & 0 & [.5,.8] & [.1,.4] & 0 \\ \hline
[.4,.7] & [.6,.8] & .2 & 1 & 1 & [.3,.5] & 0 & [.2,.4] & 0 & 0 \\ \hline
[.5,.7] & [.5,.7] & .1 & [.5,.7] & 1 & 0 & [.4,.6] & .1 & 0 & 0 \\ \hline
[.4,.5] & [.4,.6] & .9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & [.3,.5] & 0 \\ \hline
.9 & .8 & [.2,.4] & .1 & [.2,.4] & [.4,.7] & 1 & 1 & 1 & [.6,.9] \\ \hline
[.2,.5] & [.3,.6] & 0 & 1 & [.1,.4] & [.6,.8] & [.4,.6] & 1 & [.2,.4] & 1 \\ \hline
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline
1 & 1 & [.3,.5] & [.2,.4] & 0 & 0 & 0 & [.4,.6] & 0 & 1 \\ \hline
\end{array}$$

$$\underset{\sim}{A}^{(6)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|}
\hline
1 & 0 & [.7,.9] & 0 & [.1,.4] & [.3,.7] & 0 & [.5,.7] & [.2,.4] & 0 \\ \hline
1 & 1 & [.6,.9] & 1 & 0 & [.8,1] & 0 & [.6,.7] & 0 & 0 \\ \hline
[.2,.4] & 0 & 1 & 0 & 0 & [.4,.7] & 0 & [.3,.6] & 0 & 0 \\ \hline
[.7,.8] & [.7,.8] & 0 & 1 & 1 & 0 & [.4,.6] & [.5,.7] & .1 & 0 \\ \hline
[.4,.8] & [.3,.4] & 0 & 1 & 1 & 0 & [.4,.6] & 0 & 0 & 0 \\ \hline
[.5,.7] & [.5,.7] & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & [.4,.6] & 0 \\ \hline
1 & 1 & [.6,.9] & [.4,.6] & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
1 & [.7,.9] & 0 & 1 & 0 & [.6,.8] & [.4,.7] & 1 & [.6,.8] & 1 \\ \hline
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & [.3,.4] & 0 & 1 & 0 \\ \hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & [.1,.4] & 0 & 1 \\ \hline
\end{array}$$

$\underset{\sim}{A}^{(7)} =$

1	1	1	0	0	[.4,.7]	0	[.5,.7]	[.2,.4]	[.1,.2]
1	1	[.4,.7]	[.4,.6]	0	1	[.2,.4]	[.5,.7]	[.4,.6]	0
[.4,.6]	0	1	0	[.2,.4]	[.6,.8]	0	[.4,.7]	0	0
[.6,.8]	1	0	1	1	0	[.4,.6]	[.2,.5]	[.2,.4]	0
[.6,.8]	0	0	[.7,.9]	1	0	[.2,.5]	[.2,.6]	0	0
[.3,.6]	[.4,.5]	[.7,.9]	0	0	1	0	0	[.4,.7]	0
1	1	[.4,.7]	[.5,.7]	[.2,.4]	[.6,.8]	1	1	1	1
1	[.6,.8]	0	1	0	[.5,.7]	[.4,.6]	1	[.5,.7]	1
1	1	[.3,.5]	1	0	1	0	0	1	0
1	1	0	0	0	0	0	[.4,.6]	0	1

$\underset{\sim}{A}^{(8)} =$

1	0	[.6,.9]	0	0	[.4,.6]	0	[.6,.8]	.1	.1
1	1	[.3,.6]	[.3,.6]	0	[.8,1]	0	[.6,.9]	.1	0
[.4,.7]	0	1	0	0	[.6,.8]	0	[.4,.7]	0	0
.9	[.6,.8]	0	1	1	0	[.3,.5]	[.2,.4]	0	0
[.6,.7]	[.2,.5]	[.3,.5]	[.6,.8]	1	0	0	0	0	0
[.2,.4]	[.1,.3]	[.7,.8]	0	0	1	0	[.1,.4]	0	0
1	1	[.7,.8]	[.5,.7]	[.3,.5]	[.6,.8]	1	1	1	1
[.7,.9]	[.3,.6]	0	1	0	[.7,.9]	[.4,.6]	1	[.5,.7]	1
1	1	0	1	0	1	0	[.5,.6]	1	0
1	1	0	[.7,.9]	0	0	0	[.6,.8]	0	1

$\underset{\sim}{A}^{(9)} =$

1	0	[.7,.9]	0	[.2,.4]	[.4,.6]	0	[.5,.6]	0	0
1	1	[.6,.8]	[.5,.7]	.1	1	0	[.5,.7]	0	0
[.5,.7]	0	1	0	0	[.4,.7]	0	[.6,.8]	0	0
[.6,.8]	[.7,.9]	[.2,.5]	1	1	.1	[.2,.3]	[.5,.7]	[.3,.4]	[.3,.4]
[.5,.7]	[.5,.7]	0	[.7,.9]	1	0	[.4,.6]	0	0	0
[.3,.6]	[.2,.5]	1	[.1,.3]	0	1	0	0	0	0
[.7,.9]	[.6,.8]	[.4,.7]	[.3,.6]	[.2,.5]	[.4,.6]	1	1	1	1
[.6,.8]	[.5,.7]	0	1	[.4,.6]	.9	[.3,.5]	1	[.4,.6]	1
1	1	[.2,.4]	1	0	1	0	0	1	0
1	1	.1	[.2,.4]	0	0	0	[.3,.6]	0	1

$\underset{\sim}{A}^{(10)} =$

1	[.1,.3]	[.7,.8]	0	[.4,.6]	[.3,.6]	[.1,.3]	[.4,.6]	[.2,.3]	[.2,.3]
1	1	[.4,.6]	1	0	1	0	[.6,.8]	0	0
[.4,.7]	0	1	0	0	[.5,.7]	0	[.4,.6]	[.1,.3]	[.1,.3]
[.5,.6]	[.4,.6]	[.3,.6]	1	1	[.2,.4]	[.2,.4]	[.3,.5]	[.2,.4]	[.2,.4]
[.5,.6]	[.3,.5]	[.2,.4]	[.7,.9]	1	0	[.3,.5]	[.2,.4]	0	0
[.4,.6]	[.4,.7]	1	[.2,.4]	0	1	0	0	0	0
1	1	[.5,.7]	[.4,.6]	[.5,.8]	1	1	1	1	1
[.5,.8]	[.3,.4]	.1	1	[.3,.6]	[.6,.8]	[.4,.6]	1	[.5,.8]	1
1	1	[.5,.7]	1	0	1	0	[.2,.4]	1	0
1	1	[.5,.7]	[.3,.4]	0	0	0	[.5,.7]	0	1

Представленная в матрицах $\underset{\sim}{A}^{(j)}$ информация заслуживает хотя бы краткого комментария с учетом того, что исчерпывающий анализ выведет нас за рамки тематики этой книги.

В некоторых случаях присвоение оценок отношениям внешне выглядит аномальным. В качестве примера можно упомянуть инциденции таких причин, как "число рабочих" и "деятельность профсоюза" на "ежемесячную прибыль" или "ведение счетов". Хотя на первый взгляд они аналогичны, но эксперты оценили их по-разному. Так, например, эксперт 7 задает одинаковую оценку [.6,.8] инциденции на прибыль как числа рабочих, так и деятельности профсоюза, а при оценке их инциденций на ведение счетов полагает, что число рабочих является существенным (оценка равна 1), а деятельность профсоюза несущественной (оценка равна 0). Объяснение этому можно найти в том, что хотя деятельность профсоюза может повлиять на убытки (через забастовки, остановку производства), она никоим образом не влияет на доходы. Следовательно, она влияет на прибыль, а не на ведение счетов. Таково во всяком случае мнение эксперта 7.

Ответы многих экспертов, касающиеся одного и того же отношения, часто совпадают. Например, большинство экспертов считает, что инциденция "качества товаров" a_{10} на "число рабочих мест" a_4 низка или вообще нулевая. В то же время эксперты 2 и 8 сочли эту инциденцию высокой, указав одну и ту же оценку [.7,.9]. Здесь надо иметь в виду, что распространено мнение о малом влиянии качества товара или услуги на увеличение числа рабочих, необходимого для изготовления товара. Тем не менее, также существует мнение, что качество требует большего числа работников. Часто можно слышать от руководящих работников предприятий, что они не могут добиться лучшего качества, пока не получат большего количества исполнителей.

На основании матриц $\underset{\sim}{A}^{(j)}$ составляется таблица 17.2, в которой собрана статистика встречаемости каждого уровня для каждой пары (a_i,a_k), $i,k=1,2,\ldots,10$, по отдельности для левых и правых границ интервалов достоверности.

Т а б л и ц а 17.2

	a_1		a_2		a_3		a_4		a_5		a_6		a_7		a_8		a_9		a_{10}	
0			5	5			9	9	2	2			7	7			1	1	3	3
.1			2	1			1	1	2	1	1	1	1				2	1	3	1
.2			2	1					1		1						5		3	2
.3			1	1					1		2		1	1				2	1	3
.4				2	1				2	2	5	1	1		2		2	5		1
.5										1	1				3					
.6					2	1			1	1		5		2	4	3		1		
.7					4				1	1		3			1	2				
.8						3				2						4				
.9						3										1				
1	10	10			3	3														
0									7	7			8	8			7	7	8	8
.1									2	1							2	2	1	1
.2													2						1	
.3					1		1		1	1										
.4					2		1							1	2		1			1
.5							1			1				1	3					
.6					3	2	1	2			1				3	1		1		
.7					1	1	1	2			1				1	4				
.8						2					3	2			1	3				
.9						2	1	2				1				2				
1	10	10	10	10	3	3	4	4			5	7								
0			10	10			10	10	6	6			10	10			7	7	8	8
.1									1	1					1	1	2		1	
.2	3				1				2											
.3									1						2			1	1	1
.4	5	2								2	3				3			1		
.5	2	1									1				1	1	1			
.6		3								1	5				3	2				1
.7		4									1	6				2		1		
.8												4				4				
.9																				
1					10	10														
0					3	3					5	5	1	1	3	3	5	5	7	7
.1											1	1			1		2	2		
.2					4	2					3	1	4		3		2		1	
.3			1		3						1		1	1	1		1		1	
.4	2		2			1						2	2	1		3		3	1	2
.5	3		1			3						1	1	3	2	2				1
.6	3	2	2	2		1							1	2						
.7	1	3	3	2										1		2				
.8		4		4										1						
.9	1	1		1																
1			1	1			10	10	10	10										
0			1	1	5	5					10	10	1	1	4	4	9	9	9	9
.1					3	1									2	2	1	1		
.2			2	1	1		2						3		4	1				
.3	1		2		1	2							1	1		1			1	
.4	1			1		1		2					4	1		1				
.5	4	1	4	2		1	1						1	2						
.6	4	1	1	1			3							3		1				1
.7		5		4			3	1						2						
.8		3						3												
.9								3												
1							1	1	10	10										

Окончание табл. 17.2

		a_1		a_2		a_3		a_4		a_5		a_6		a_7		a_8		a_9		a_{10}	
a_6	0							8	8	10	10			10	10	9	9	3	3	8	8
	.1			1				1								1				1	1
	.2	2		1				1										1		1	
	.3	2		1	1				1									2			
	.4	3	2	5					1								1	2	1		1
	.5	2	1	1	3													1	2		
	.6		4		3	2												1	1		
	.7	1	2		2	3													3		
	.8		1	1	1	1	4														
	.9					1	3														
	1					3	3					10	10								
a_7	0									1	1										
	.1							1	1												
	.2					1		1		4	1										
	.3							1		1											
	.4					3	1	2	1	3	2	4									
	.5					3		2		1	2	1	1								
	.6			1		1	1	2	3		1	2	2							1	
	.7	2				2	5	1	2		1	1	2								
	.8	1		2	2		1		3		2		2			1		1		1	
	.9	1	4		1		2						1			1	2		1		2
	1	6	6	7	7							2	2	10	10	8	8	9	9	8	8
a_8	0					6	6			3	3			1	1						
	.1					3	3			2	1										
	.2	1				1								1				2			
	.3			4			1			1				1							
	.4	1			1					2	1	1		6				3	2		
	.5	1	1	2	1							1			2			3			
	.6	2	1	2	2					2	3	4	1	1	4			2	2		
	.7	3		2	2							2	1		2				3		
	.8		4		2						2		4		1				3		
	.9		2		2							2	4								
	1	2	2					10	10							10	10			10	10
a_9	0					3	3			10	10			9	9	6	6			10	10
	.1																				
	.2					2										2					
	.3					2								1							
	.4					2	1	1							1	1	2				
	.5					1	3									1					
	.6						2	2									1				
	.7						1		2								1				
	.8							1	1												
	.9								1												
	1	10	10	10	10			6	6			10	10					10	10		
a_{10}	0					3	3	2	2	10	10	8	8	10	10	2	2	10	10		
	.1					1	1									1					
	.2							4								2					
	.3					2	1	2	1							1					
	.4					2			4							2	1				
	.5					1	1		1			1				1	2				
	.6						1					1				1	3				
	.7					1	2	2					1				1				
	.8												1				1				
	.9						1		2												
	1	10	10	10	10															10	10

Так же, как и в предыдущих случаях, в клетках табл. 17.2 указывается, сколько раз эксперты дали одну и ту же оценку каждой из инциденций левых и правых границ интервалов достоверности по отдельности. По частоте используемых оценок можно видеть, насколько совпадают или расходятся мнения экспертов. Можно было бы исследовать причины этого, однако мы хотим сконцентрировать внимание на описании модели, неукоснительно придерживаясь мнений экспертов, хотя некоторые из них и кажутся спорными.

По аналогии с предыдущим параграфом рассмотрим еще оценки существующих отношений между следствиями (целями предприятия). Для этого каждый j-й эксперт при тех же условиях должен составить еще одну Ф-нечеткую матрицу $\underset{\sim}{B}^{(j)}$, $j = 1,2,...,10$, в клетках (b_i,b_k) которой в виде доверительных интервалов будут стоять оценки инциденций цели b_i на цель b_k, $i,k = 1,2,...,8$. Эти десять новых матриц имеют вид:

$\underset{\sim}{B}^{(1)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
b_1	1	1	[.6,.8]	[.3,.5]	0	[.1,.3]	[.4,.7]	[.2,.4]
b_2	1	1	[.2,.4]	[.3,.4]	0	0	[.2,.4]	[.2,.4]
b_3	0	0	1	0	[.4,.6]	0	[.7,.9]	0
b_4	[.5,.7]	[.3,.5]	[.6,.8]	1	1	[.6,.8]	[.6,.8]	[.4,.6]
b_5	.1	[.2,.4]	[.7,.9]	1	1	[.4,.7]	1	[.4,.6]
b_6	0	1	[.6,.8]	[.5,.7]	[.7,.8]	1	[.6,.9]	[.6,.8]
b_7	0	0	[.2,.4]	[.5,.6]	0	0	1	[.4,.6]
b_8	[.2,.5]	0	[.5,.7]	[.6,.8]	[.2,.5]	[.4,.6]	[.5,.7]	1

$\underset{\sim}{B}^{(2)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
b_1	1	1	1	[.1,.4]	0	0	1	[.6,.8]
b_2	[.6,.9]	1	[.3,.5]	0	0	0	[.3,.5]	.2
b_3	0	0	1	0	[.7,.8]	0	[.7,.9]	0
b_4	[.3,.5]	0	[.6,.8]	1	1	[.6,.8]	1	[.4,.6]
b_5	[.4,.7]	0	[.6,.8]	1	1	[.3,.6]	1	[.3,.5]
b_6	[.2,.4]	[.6,.8]	[.4,.6]	[.2,.4]	[.6,.8]	1	[.6,.8]	[.4,.7]
b_7	0	0	[.4,.7]	[.6,.8]	0	0	1	[.4,.6]
b_8	[.3,.5]	0	[.4,.6]	[.2,.4]	0	[.4,.7]	[.6,.7]	1

$\underset{\sim}{B}^{(3)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
b_1	1	1	[.6,.8]	0	0	[.3,.5]	[.4,.7]	[.2,.4]
b_2	[.4,.6]	1	0	0	0	[.4,.6]	0	0
b_3	0	0	1	0	[.3,.5]	0	[.7,.9]	0
b_4	[.3,.7]	0	[.6,.8]	1	1	[.5,.7]	[.4,.7]	[.2,.5]
b_5	[.5,.7]	0	[.6,.8]	1	1	[.6,.8]	1	[.5,.7]
b_6	[.2,.4]	[.5,.7]	[.5,.7]	[.5,.7]	[.5,.8]	1	[.7,.9]	[.4,.6]
b_7	0	0	[.3,.6]	[.4,.7]	0	0	1	[.2,.4]
b_8	[.3,.5]	0	[.4,.6]	[.3,.6]	0	[.3,.5]	[.4,.6]	1

$\underset{\sim}{B}^{(4)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
b_1	1	1	[.6,.8]	[.2,.4]	0	[.2,.4]	[.7,.9]	0
b_2	[.7,.9]	1	0	[.3,.5]	0	[.3,.5]	[.4;.6]	0
b_3	0	0	1	0	[.4,.6]	0	1	0
b_4	[.6,.8]	[.2,.4]	[.4,.6]	1	1	[.4,.7]	1	[.4,.6]
b_5	[.5,.6]	0	[.5,.8]	1	1	[.6,.8]	1	[.3,.6]
b_6	[.3,.5]	[.3,.5]	[.5,.7]	[.2,.4]	[.6,.7]	1	[.6,.8]	[.3,.5]
b_7	0	0	[.4,.6]	[.5,.7]	0	0	1	[.5,.7]
b_8	[.5,.7]	0	[.5,.7]	[.4,.6]	[.1,.3]	[.2,.4]	[.4,.7]	1

$\underset{\sim}{B}^{(5)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
b_1	1	1	[.7,.9]	[.4,.6]	0	0	1	[.2,.4]
b_2	1	1	[.2,.5]	[.3,.6]	0	[.2,.4]	[.2,.5]	0
b_3	0	0	1	0	[.4,.6]	0	[.7,.9]	0
b_4	[.5,.8]	[.3,.5]	[.7,.8]	1	1	[.4,.6]	1	[.3,.6]
b_5	[.5,.6]	0	[.6,.8]	1	1	[.2,.5]	1	[.2,.4]
b_6	[.2,.4]	[.6,.8]	[.5,.7]	[.5,.7]	[.4,.8]	1	[.7,.9]	[.6,.7]
b_7	0	0	[.4,.7]	[.3,.5]	0	[.2,.4]	1	[.4,.6]
b_8	[.2,.5]	0	[.4,.6]	[.3,.6]	[.2,.4]	[.3,.5]	[.4,.6]	1

$\underset{\sim}{B}^{(6)} =$

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8
b1	1	1	[.7,.9]	[.4,.6]	0	[.2,.4]	[.8,.9]	[.3,.5]
b2	[.7,.9]	1	[.4,.7]	[.3,.6]	0	[.4,.6]	[.3,.5]	0
b3	0	0	1	0	[.4,.6]	0	[.7,.8]	0
b4	[.4,.6]	[.4,.6]	[.3,.6]	1	1	[.4,.6]	[.6,.8]	[.3,.5]
b5	[.5,.7]	[.2,.5]	[.4,.7]	1	1	[.5,.7]	[.8,.9]	[.3,.5]
b6	[.4,.6]	[.5,.7]	[.4,.6]	[.3,.5]	[.4,.8]	1	[.6,.8]	[.3,.5]
b7	0	0	[.5,.7]	[.3,.5]	[.2,.4]	0	1	[.4,.6]
b8	[.3,.5]	0	[.5,.7]	[.2,.4]	[.4,.6]	[.3,.6]	[.4,.7]	1

$\underset{\sim}{B}^{(7)} =$

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8
b1	1	1	[.6,.8]	[.4,.6]	0	[.5,.7]	[.7,.9]	.1
b2	[.6,.9]	1	[.2,.4]	[.5,.7]	0	[.4,.6]	[.3,.6]	0
b3	0	0	1	0	[.1,.2]	0	[.7,.9]	0
b4	[.4,.5]	[.2,.4]	[.4,.6]	1	1	[.3,.5]	[.7,.8]	[.4,.6]
b5	[.3,.6]	.1	[.3,.5]	1	1	[.4,.6]	1	[.2,.4]
b6	[.3,.5]	[.4,.7]	[.4,.6]	[.2,.4]	[.5,.7]	1	[.6,.8]	[.5,.8]
b7	0	0	[..4,.6]	[.3,.6]	0	0	1	[.4,.6]
b8	[.2,.4]	0	[.3,.5]	[.5,.7]	[.3,.5]	[.4,.6]	[.3,.5]	1

$\underset{\sim}{B}^{(8)} =$

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8
b1	1	1	[.3,.6]	[.2,.4]	0	[.3,.6]	[.6,.8]	[.1,.3]
b2	[.4,.8]	1	[.1,.3]	[.4,.5]	0	[.3,.5]	[.2,.3]	0
b3	0	0	1	0	[.4,.5]	0	[.6,.8]	0
b4	[.3,.4]	[.2,.4]	[.4,.6]	1	1	[.5,.7]	[.8,.9]	[.2,.5]
b5	[.1,.3]	0	[.3,.5]	1	1	[.6,.8]	1	[.2,.4]
b6	[.1,.3]	[.4,.6]	[.4,.6]	[.2,.4]	[.4,.7]	1	[.5,.6]	[.4,.7]
b7	0	0	0	[.4,.6]	0	0	1	[.1,.4]
b8	[.2,.5]	[.2,.4]	[.3,.6]	[.4,.6]	0	[.2,.6]	[.2,.6]	1

$\underset{\sim}{B}^{(9)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
b_1	1	1	[.4,.6]	[.3,.6]	.2	[.2,.4]	[.7,.9]	[.3,.5]
b_2	[.3,.6]	1	[.2,.4]	[.3,.5]	0	[.1,.4]	[.1,.3]	0
b_3	0	0	1	0	[.5,.7]	0	[.6,.8]	0
b_4	[.3,.4]	[.2,.3]	[.4,.6]	1	1	[.4,.6]	[.4,.7]	[.3,.6]
b_5	0	0	[.2,.5]	1	1	[.5,.7]	1	[.2,.5]
b_6	[.2,.4]	[.4,.6]	[.5,.7]	[.3,.5]	[.6,.8]	1	[.6,.8]	[.5,.7]
b_7	0	0	[.3,.5]	[.2,.5]	0	0	1	[.2,.4]
b_8	[.3,.5]	.1	[.3,.6]	[.1,.4]	0	[.2,.4]	[.3,.5]	1

$\underset{\sim}{B}^{(10)} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
b_1	1	1	[.5,.7]	[.3,.6]	0	[.3,.5]	1	[.2,.4]
b_2	[.4,.5]	1	[.3,.6]	[.2,.5]	0	.1	[.2,.3]	0
b_3	0	0	1	0	[.4,.6]	0	[.7,.9]	0
b_4	[.2,.4]	[.2,.4]	[.4,.6]	1	1	[.4,.7]	[.5,.8]	[.2,.4]
b_5	0	0	[.3,.5]	1	1	[.4,.6]	[.8,.9]	[.4,.6]
b_6	[.2,.5]	[.3,.5]	[.4,.7]	[.2,.4]	[.7,.8]	1	.9	[.4,.6]
b_7	0	0	[.2,.5]	.2	0	0	1	.1
b_8	[.2,.4]	0	[.4,.7]	[.2,.5]	0	[.1,.3]	[.4,.6]	1

На основе матриц $\underset{\sim}{B}^{(j)}$ составляется таблица (табл. 17.3), в которой собрана статистика встречаемости каждого уровня для каждой пары (b_i,b_k), $i,k = 1,2,\dots,8$, для левых и правых границ интервалов достоверности по отдельности.

Данные из табл. 17.1-17.3 как обобщение мнений десяти экспертов об оценках инциденций a_i на b_k, a_i на a_k и b_i на b_k используются для получения частоты встречаемости каждого уровня, для чего достаточно поделить цифры в каждой клетке на 10. Считаем излишним воспроизводить соответствующие три таблицы, поскольку из-за выбора 10 экспертов там оказались бы те же самые цифры, но с точкой впереди.

Т а б л и ц а 17.3

		b_1		b_2		b_3		b_4		b_5		b_6		b_7		b_8	
b_1	0							1	1	9	9	2	2			1	1
	.1							1				1	[illegible]			2	1
	.2							2		1	1	3				4	
	.3					1		3				3	1			2	1
	.4					1		3	3				3	2			4
	.5					1			1			1	2				2
	.6					4	2		5				1	1		1	
	.7					2	1						1	3	2		
	.8						4							1	1		1
	.9						2								4		
	1	10	10	10	10	1	1							3	3		
b_2	0					2	2	2	2	10	10	2	2	1	1	8	8
	.1					1						2	1	1			
	.2					4		1				1		4		2	1
	.3	1				2	1	5				2		3	3		
	.4	3				1	3	1	1			3	2	1	1		1
	.5		1				2	1	4				2		3		
	.6	2	2				1		2				3		2		
	.7	2					1		1								
	.8		1														
	.9		4														
	1	2	2	10	10												
b_3	0	10	10	10	10			10	10			10	10			10	10
	.1									1							
	.2										1						
	.3									1							
	.4									6							
	.5									1	2						
	.6										5			2			
	.7									1	1			7			
	.8										1				3		
	.9														6		
	1					10	10							1	1		
b_4	0			2	2												
	.1																
	.2	1		5												3	
	.3	4		2	1	1						1				3	
	.4	2	3	1	4	5						5		2		4	1
	.5	2	2		2							2	1	1			3
	.6	1	1		1	3	6					2	3	2			6
	.7		2			1							4	1	2		
	.8		2				4						2	1	4		
	.9														1		
	1							10	10	10	10			3	3		

О к о н ч а н и е т а б л . 17.3

		b_1		b_2		b_3		b_4		b_5		b_6		b_7		b_8	
b_5	0	2	2	7	7												
	.1	2	1	1	1												
	.2			2		1						1				4	
	.3	1	1			3						1				3	
	.4	1			1	1						3				2	3
	.5	4			1	1	4					2	1			1	3
	.6		3			3						3	3				3
	.7		3			1	1						3				1
	.8						4						3	2			
	.9						1								2		
	1							10	10	10	10			8	8		
b_6	0	1	1														
	.1	1															
	.2	5						5									
	.3	2	1	2				2								2	
	.4	1	4	3		5			5	3						4	
	.5		3	2	2	4		3	2	2				1		2	2
	.6		1	2	2	1	4			3				6	1	2	2
	.7				3		5		3	2	3			2			4
	.8				2		1				7				5		2
	.9													1	4		
	1			1	1							10	10				
b_7	0	10	10	10	10	1	1			9	9	9	9				
	.1															2	1
	.2					2		2	1	1		1				2	
	.3					2		3									
	.4					4	1	2			1		1			5	3
	.5					1	2	2	3							1	
	.6						3	1	3								5
	.7						3		2								1
	.8								1								
	.9																
	1													10	10		
b_8	0			8	8					5	5						
	.1			1	1			1		1		1					
	.2	5		1				3		2		3		1			
	.3	4				3		2		1	1	3	1	2			
	.4		2		1	4		2	3	1	1	3	2	5			
	.5	1	7			3	1	1	1		2		2	1	2		
	.6						5	1	4		1		4	1	4		
	.7		1				4		1				1		4		
	.8								1								
	.9																
	1															10	10

Упрощенный метод с осреднением данных

Как уже отмечалось, откажемся от использования общей схемы, аналогичной схеме предыдущего параграфа с дублированием операций для левых и правых границ доверительных интервалов. Воспользуемся менее строгим, но очень удобным из-за своей простоты вариантом. Он оперирует средними, полученными из статистических таблиц (см. табл. 17.1-17.3), данные из которых преобразованы в частоты (делением на 10). По таким частотам вычисляем математические ожидания значений левых и правых границ доверительных интервалов. Например, при оценке инциденции $a_1 \longrightarrow b_1$ по матрицам $\underset{\sim}{M}^{(j)}$, j=1, 2, ..., 10, получим для левой границы

$$M_*(a_1,b_1) = 0.8 \cdot 0.1 + 0.9 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.7 = 0.96 ,$$

для правой

$$M^*(a_1,b_1) = 0.9 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.7 = 0.97 ;$$

для инциденции $a_1 \longrightarrow b_2$ имеем для левой границы

$$M_*(a_1,b_2) = 0.8 \cdot 0.4 + 0.9 \cdot 0.5 + 1 \cdot 0.1 = 0.87 ,$$

для правой

$$M^*(a_1,b_2) = 0.8 \cdot x0.2 + 0.9 \cdot x0.7 + 1 \cdot x0.1 = 0.89$$

и так далее для всевозможных пар (a_i,b_k).

При оценке инциденции $a_1 \longrightarrow a_1$ по матрицам $\underset{\sim}{A}^{(j)}$, j=1, 2, ..., 10, получим для левой границы

$$M_*(a_1,a_1) = 1 \cdot 1 = 1 ,$$

для правой

$$M^*(a_1,a_1) = 1 \cdot 1 = 1 ;$$

для инциденции $a_1 \longrightarrow a_2$ имеем для левой границы

$$M_*(a_1,a_2) = 0 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.2 + 0.2 \cdot 0.2 + 0.3 \cdot 0.1 = 0.09,$$

для правой

$$M^*(a_1,a_2) = 0 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.1 + 0.2 \cdot 0.1 + 0.3 \cdot 0.1 + 0.4 \cdot 0.2 = 0.14$$

и так далее для всевозможных пар (a_i,a_k).

При оценке инциденции $b_1 \longrightarrow b_1$ по матрицам $\underset{\sim}{B}^{(j)}$, j=1, 2, ..., 10, получим для левой границы

$$M_*(b_1,b_1) = 1 \cdot 1 = 1 ,$$

для правой

$$M^*(b_1,b_1) = 1 \cdot 1 = 1 ;$$

для инциденции $b_1 \longrightarrow b_2$ имеем для левой границы

$$M_*(b_1,b_2) = 1 \cdot 1 = 1 ,$$

для правой

$$M^*(b_1,b_2) = 1 \cdot 1 = 1$$

и так далее для всевозможных пар (b_i,b_k). После нахождения таким образом всех средних по матрицам $\underset{\sim}{M}^{(j)}$, $\underset{\sim}{A}^{(j)}$, $\underset{\sim}{B}^{(j)}$ построим матрицы М ($\underset{\sim}{M}$), М($\underset{\sim}{A}$), М ($\underset{\sim}{B}$) (квадратные скобки для интервалов в них опущены):

$M(\underset{\sim}{M}) =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	.96,.97	.87,.89	.81,.90	.35,.49	.49,.70	.25,.36	.96,.98	.46,.64
a_2	.09,.14	.05,.08	.45,.65	.43,.63	.24,.44	.13,.26	.43,.62	.03
a_3	.37,.52	.07,.08	.74,.87	.48,.64	.38,.50	.17,.24	.84,.94	.42,.54
a_4	.10,.15	0	.09,.14	.16,.24	.38,.58	.24,.40	.54,.72	.91,.95
a_5	.12,.18	.02,.02	.10,.15	.13,.23	.04,.08	.24,.38	.59,.74	1
a_6	.19,.24	0	.56,.71	.37,.51	.55,.75	.10,.17	.41,.59	0
a_7	.43,.64	.04,.06	.57,.72	.56,.78	.68,.81	.39,.59	.84,.92	.77,.90
a_8	.38,.59	0	.38,.53	.58,.71	.38,.53	.18,.31	.92,.98	.02
a_9	0	0	.11,.20	.92,.95	.97,.99	.36,.51	.87,.93	0
a_{10}	0	0	.06,.09	1	.98,.99	.44,.65	.97,.97	0

$M(\underset{\sim}{A}) =$

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
a_1	1	.09,.14	.74,.87	.01,.01	.28,.43	.34,.56	.08,.15	.54,.73	.20,.33	.12,.18
a_2	1	1	.66,.83	.74,.84	.05,.09	.87,.95	.04,.09	.56,.76	.06,.08	.03,.05
a_3	.36,.59	0	1	0	.08,.15	.54,.74	0	.42,.64	.07,.14	.04,.09
a_4	.57,.74	.59,.77	.17,.29	1	1	.10,.16	.30,.49	.20,.36	.09,.14	.09,.13
a_5	.51,.70	.36,.50	.08,.16	.58,.76	1	0	.30,.49	.10,.17	.01	.03,.06
a_6	.39,.59	.39,.58	.80,.89	.03,.07	0	1	0	.01,.04	.27,.41	.03,.05
a_7	.91,.96	.92,.95	.49,.71	.43,.61	.28,.49	.60,.76	1	.97,.98	.98,.99	.94,.98
a_8	.64,.81	.48,.69	.05,.06	1	.25,.39	.65,.81	.35,.56	1	.43,.65	1
a_9	1	1	.23,.38	.84,.91	0	1	.03,.04	.13,.21	1	0
a_{10}	1	1	.27,.38	.28,.42	0	.11,.15	0	.27,.47	0	1

$M(\underset{\sim}{B}) =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
b_1	1	1	.60,.79	.26,.47	.02,.02	.21,.38	.73,.88	.22,.38
b_2	.61,.81	1	.19,.38	.26,.43	0	.22,.37	.22,.40	.04,.06
b_3	0	0	1	0	.40,.57	0	.71,.88	0
b_4	.38,.58	.20,.35	.48,.68	1	1	.45,.67	.70,.85	.31,.55
b_5	.29,.43	.05,.10	.45,.68	1	1	.45,.68	.96,.98	.30,.52
b_6	.21,.40	.50,.69	.46,.67	.31,.51	.54,.77	1	.64,.82	.44,.66
b_7	0	0	.31,.53	.37,.57	.02,.04	.02,.04	1	.31,.50
b_8	.27,.50	.03,.05	.40,.63	.32,.56	.12,.23	.28,.52	.39,.62	1

Матрицы $M(\underset{\sim}{M})$, $M(\underset{\sim}{A})$, $M(\underset{\sim}{B})$ представляют собой в определенном смысле добавочное мнение всех экспертов. Если их считать репрезентативными, то задача явно упрощается, хотя, конечно, остается в стороне вся информация, собранная в экспертонах. Сейчас этими матрицами мы будем так оперировать, как будто речь идет только об одном мнении, выраженном с помощью Ф-нечетких матриц, в которых оценками являются доверительные интервалы, причем гипотетический эксперт выражает свое мнение с точностью до сотых.

В соответствии с нашей схемой найдем свертку $M(\underset{\sim}{A})\circ M(\underset{\sim}{M})\circ M(\underset{\sim}{B})$ с целью получения накопленных воздействий первого и второго порядков. Для этого сначала вычислим свертку

$M(\underset{\sim}{A})\circ M(\underset{\sim}{M}) =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	.96,.97	.87,.89	.81,.90	.54,.71	.49,.70	.25,.38	.96,.98	.46,.64
a_2	.96,.97	.87,.89	.81,.90	.56,.71	.55,.75	.25,.40	.96,.98	.74,.84
a_3	.38,.59	.36,.59	.74,.87	.48,.64	.54,.74	.25,.36	.84,.94	.42,.59
a_4	.57,.74	.57,.74	.57,.74	.43,.63	.49,.70	.30,.49	.59,.74	1
a_5	.51,.70	.51,.70	.51,.70	.36,.50	.49,.70	.30,.49	.59,.74	1
a_6	.39,.59	.39,.59	.74,.87	.48,.64	.55,.75	.27,.41	.80,.89	.42,.59
a_7	.91,.96	.87,.89	.81,.90	.94,.98	.97,.99	.44,.65	.94,.98	.77,.90
a_8	.64,.81	.64,.81	.64,.81	1	.98,.99	.44,.65	.97,.98	.91,.95
a_9	.96,.97	.87,.89	.81,.90	.92,.95	.97,.99	.36,.51	.96,.98	.84,.91
a_{10}	.96,.97	.87,.89	.81,.90	1	.98,.99	.44,.65	.97,.98	.46,.64

и, далее, результирующую матрицу

$M(\underset{\sim}{A})\circ M(\underset{\sim}{M})\circ$
$\circ M(\underset{\sim}{B}) =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	.96,.97	.96,.97	.81,.90	.54,.71	.54,.71	.45,.68	.96,.98	.46,.64
a_2	.96,.97	.96,.97	.81,.90	.56,.75	.56,.75	.45,.68	.96,.98	.74,.84
a_3	.38,.59	.38,.59	.74,.87	.54,.74	.54,.74	.45,.68	.84,.94	.42,.59
a_4	.57,.74	.57,.74	.57,.74	.49,.70	.49,.70	.45,.68	.59,.74	1
a_5	.51,.70	.51,.70	.51,.70	.49,.70	.49,.70	.45,.68	.59,.74	1
a_6	.39,.59	.39,.59	.74,.87	.55,.75	.55,.75	.45,.68	.80,.89	.42,.59
a_7	.91,.96	.91,.96	.81,.90	.97,.99	.97,.99	.45,.68	.96,.98	.77,.90
a_8	.64,.81	.64,.81	.64,.81	1	1	.45,.68	.97,.98	.91,.95
a_9	.96,.97	.96,.97	.81,.90	.97,.99	.97,.99	.45,.68	.96,.98	.84,.91
a_{10}	.96,.97	.96,.97	.81,.90	1	1	.45,.68	.97,.98	.46,.65

С целью выявления скрытых воздействий необходимо сравнить матрицу $M(\underset{\sim}{A})\circ M(\underset{\sim}{M})\circ M(\underset{\sim}{B})$, дающую накопленные воздействия первого и второго порядков, с матрицей $M(\underset{\sim}{M})$, представляющей воздействия первого порядка. Но так как для интервалов в принципе невозможно установить отношения линейного порядка, то приходится отыскивать средние значения каждого интервала в обеих матрицах:

$\overline{M}(\underset{\sim}{M}) =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	.965	.965	.855	.625	.625	.565	.970	.550
a_2	.965	.965	.855	.655	.655	.565	.970	.790
a_3	.485	.485	.805	.640	.640	.565	.890	.505
a_4	.655	.655	.655	.595	.595	.565	.665	1
a_5	.605	.605	.605	.595	.595	.565	.665	1
a_6	.490	.490	.805	.650	.650	.565	.845	.505
a_7	.935	.935	.855	.980	.980	.565	.970	.835
a_8	.725	.725	.725	1	1	.565	.975	.930
a_9	.965	.965	.855	.980	.980	.565	.970	.875
a_{10}	.965	.965	.855	1	1	.565	.975	.555

$\overline{M}(\underset{\sim}{M}^*)$ =

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	.965	.880	.855	.420	.595	.305	.970	.550
a_2	.115	.065	.550	.530	.340	.195	.525	.030
a_3	.445	.075	.805	.560	.440	.205	.890	.480
a_4	.125	0	.115	.200	.480	.320	.630	.930
a_5	.150	.020	.125	.180	.060	.310	.665	1
a_6	.215	0	.635	.440	.650	.135	.500	0
a_7	.535	.050	.645	.670	.745	.490	.880	.835
a_8	.485	0	.455	.645	.455	.245	.950	.020
a_9	0	0	.155	.935	.980	.435	.900	0
a_{10}	0	0	.075	1	.985	.545	.970	0

Сравнение этих матриц проявляет скрытые воздействия. Для этого достаточно найти разность :

$\overline{M}(\underset{\sim}{M}^*) - \overline{M}(\underset{\sim}{M})$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	0	.085	0	.205	.030	.260	0	0
a_2	.850	.900	.300	.125	.315	.370	.445	.760
a_3	.040	.410	0	.080	.200	.125	0	.025
a_4	.530	.655	.540	.395	.115	.245	.035	.070
a_5	.455	.585	.480	.415	.535	.255	0	0
a_6	.275	.490	.170	.210	0	.430	.345	.505
a_7	.400	.885	.210	.210	.235	.075	.090	0
a_8	.240	.725	.270	.355	.545	.320	.025	.910
a_9	.965	.965	.700	.045	0	.130	.070	.875
a_{10}	.965	.965	.780	0	.015	.020	.005	.555

Даже беглого взгляда на матрицу $\overline{M}(\underset{\sim}{M}^*) - \overline{M}(\underset{\sim}{M})$ достаточно для обнаружения воздействий, которые не учли эксперты. Так, появляются отношения (a_9,b_1) и (a_9,b_2) (инциденции ассортимента товаров на стоимость предприятия и котировку акций соответственно) и отношения (a_{10},b_1), (a_{10},b_2) (инциденции качества изделий на стоимость предприятия и котировку акций соответственно). Если ориентироваться на более низкие значения элементов этой разности, то можно рассмотреть отношения (a_8,b_8) (инциденцию степени технологичности на общественно-политическую значимость) и (a_2, b_2) (инциденцию ведения счетов на котировку акций).

Метод, основанный на экспертонах

Строгое следование предложенному ранее методу удлиняет процесс расчетов, но позволяет использовать богатство информации, предоставляемой экспертонами. Если провести накопление вероятностей по информации, содержащейся в таблицах 17.1-17.3, то получим как для левых, так и для правых границ интервалов достоверности экспертоны, представленные табл. 17.4-17.6.

Т а б л и ц а 17.4

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.2	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	.8 1	1 1	1 1
	.3	1 1	1 1	1 1	.9 .9	1 1	.4 .7	1 1	1 1
	.4	1 1	1 1	1 1	.5 .9	.8 1	.1 .5	1 1	.8 1
	.5	1 1	1 1	1 1	.1 .8	.6 1	.1 .1	1 1	.5 1
	.6	1 1	1 1	1 1	0 .2	.4 .9	.1 .1	1 1	.2 .8
	.7	1 1	1 1	.8 1	0 .1	.1 .8	0 .1	1 1	.1 .4
	.8	1 1	1 1	.5 .9	0 0	0 .3	0 .1	1 1	0 .1
	.9	.9 1	.6 .8	.4 .7	0 0	0 0	0 0	.8 1	0 .1
	1	.7 .7	.1 .1	.4 .4	0 0	0 0	0 0	.8 .8	0 0
a_2	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	.6 .6	.3 .3	1 1	1 1	1 1	.7 .8	1 1	.3 .3
	.2	.2 .5	.2 .3	1 1	1 1	.8 .9	.4 .6	1 1	0 0
	.3	.1 .2	0 .2	.9 1	1 1	.4 .8	.2 .5	.8 1	0 0
	.4	0 .1	0 0	.8 1	.8 .1	.2 .8	0 .4	.8 .9	0 0
	.5	0 0	0 0	.5 .9	.4 .9	0 .6	0 .3	.4 .9	0 0
	.6	0 0	0 0	.3 .9	.1 .7	0 .3	0 0	.3 .8	0 0
	.7	0 0	0 0	0 ..4	0 .5	0 0	0 0	0 .4	0 0
	.8	0 0	0 0	0 .3	0 .1	0 0	0 0	0 .2	0 0
	.9	0 0	0 0	0 0	0 .1	0 0	0 0	0 0	0 0
	1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
a_3	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	.4 .4	1 1	1 1	.9 .9	.9 .9	1 1	1 1
	.2	.9 .9	.3 .3	1 1	1 1	.9 .9	.4 .5	1 1	1 1
	.3	.7 .9	0 .1	1 1	.8 1	.8 .8	.2 .4	1 1	.9 .9
	.4	.5 .8	0 0	1 1	.8 .8	.7 .8	2. .3	1 1	.7 .9
	.5	.3 .6	0 0	1 1	.6 .8	.5 .8	0 ..2	1 1	.4 .8
	.6	.3 .5	0 0	.9 1	.6 .8	0 .6	0 .1	1 1	.2 .5
	.7	0 .3	0 0	.6 1	0 .7	0 .2	0 0	.8 1	0 .3
	.8	0 .2	0 0	.3 .9	0 .3	0 0	0 0	.7 1	0 0
	.9	0 0	0 0	.3 .5	0 0	0 0	0 0	.5 .8	0 0
	1	0 0	0 0	.3 .3	0 0	0 0	0 0	.4 .6	0 0
a_4	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	.5 .5	0 0	.6 .6	.6 .6	1 1	.9 .9	1 1	1 1
	.2	.3 .4	0 0	.2 .4	.5 .5	.9 1	.6 .6	1 1	1 1
	.3	.2 .3	0 0	.1 .3	.3 .5	.9 .9	.4 .6	1 1	1 1
	.4	0 .2	0 0	0 .1	.1 .4	.7 .9	.3 .6	.9 1	1 1
	.5	0 .1	0 0	0 0	.1 .3	.3 .9	.1 .6	.7 1	1 1
	.6	0 0	0 0	0 0	0 .1	0 .7	.1 .4	.6 .8	1 1
	.7	0 0	0 0	0 0	0 0	0 .3	0 .2	.2 .8	1 1
	.8	0 0	0 0	0 0	0 0	0 .1	0 .1	0 .5	.9 1
	.9	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 .1	.7 .9
	1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	.5 .6
a_5	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	.4 .4	.1 .1	.3 .3	.5 .5	.3 .3	.9 .9	1 1	1 1
	.2	.3 .3	.1 .1	.3 .3	.4 .4	.1 .2	.7 .8	1 1	1 1
	.3	.3 .3	0 0	.2 .3	.3 .4	0 .2	.5 .8	1 1	1 1
	.4	.2 .3	0 0	.1 .3	.1 .4	0 .1	.2 .5	1 1	1 1
	.5	0 .2	0 0	.1 .2	0 .3	0 0	.1 .4	.7 1	1 1
	.6	0 .1	0 0	0 .1	0 .2	0 0	0 .4	.5 1	1 1
	.7	0 .1	0 0	0 0	0 .1	0 0	0 0	.3 .8	1 1
	.8	0 .1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	.2 .4	1 1
	.9	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	.2 .2	1 1
	1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_6	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	.9 .9	0 0	1 1	.9 .9	1 1	.4 .4	1 1	0 0
	.2	.5 .6	0 0	1 1	.8 .9	1 1	.3 .3	1 1	0 0
	.3	.3 .4	0 0	1 1	.7 .8	1 1	.3 .3	.7 1	0 0
	.4	.1 .3	0 0	1 1	.6 .8	1 1	0 .3	.6 .8	0 0
	.5	.1 .2	0 0	.7 1	.4 .7	.7 1	0 .3	.3 .8	0 0
	.6	0 0	0 0	.6 1	.1 .5	.6 1	0 .1	.2 .6	0 0
	.7	0 0	0 0	.2 .7	.1 .3	.1 .9	0 0	.1 .4	0 0
	.8	0 0	0 0	.1 .4	.1 .1	.1 .5	0 0	.1 .2	0 0
	.9	0 0	0 0	0 0	0 .1	0 .1	0 0	.1 1	[illegible]
	1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
a_7	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	.9 .9	.3 .3	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	[illegible]
	.2	.9 .9	.1 .2	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.3	.9 .9	0 .1	1 1	.9 1	1 1	.9 1	1 1	[illegible]
	.4	.9 .9	0 0	1 1	.9 1	1 1	.3 1	1 1	[illegible]
	.5	.5 .9	0 0	.7 1	.7 .9	1 1	.1 1	1 1	1 1
	.6	.2 .9	0 0	.5 .9	.5 .9	.8 1	.1 .4	1 1	1 1
	.7	0 .7	0 0	.2 .8	.4 .9	.4 .9	0 .3	.9 1	.8 1
	.8	0 .3	0 0	.2 .3	.2 .7	.4 .7	0 .2	.7 1	.6 1
	.9	0 0	0 0	.1 .2	0 .3	.2 .3	0 0	.6 .9	.2 .8
	1	0 0	0 0	0 0	0 .1	0 .2	0 0	.2 .3	.1 .2
a_8	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	0 .0	1 1	1 1	.9 .9	.8 .8	1 1	.2 .2
	.2	1 1	0 0	.8 1	.9 1	.8 .8	.6 .7	1 1	0 0
	.3	.9 1	0 0	.7 .9	.9 1	.8 .8	.3 .7	1 1	0 0
	.4	.5 .9	0 0	.6 .7	.8 .9	.5 .8	.1 .6	1 1	0 0
	.5	.3 .9	0 0	.4 .6	.6 .9	.4 .6	0 .2	1 1	0 0
	.6	.1 .7	0 0	.3 .5	.6 .9	.2 .5	0 .1	1 1	0 0
	.7	0 .4	0 0	0 .5	.5 .6	.1 .5	0 0	.9 1	0 0
	.8	0 0	0 0	0 .1	.3 .5	.1 .3	0 0	.9 1	0 0
	.9	0 0	0 0	0 0	.1 .2	0 .1	0 0	.7 .9	0 0
	1	0 0	0 0	0 0	.1 .1	0 0	0 0	.7 .9	0 0
a_9	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	0 0	0 0	.6 .6	1 1	1 1	.8 .8	1 1	0 0
	.2	0 0	0 0	.3 .5	1 1	1 1	.8 .8	1 1	0 0
	.3	0 0	0 0	.2 .5	1 1	1 1	.7 .8	1 1	0 0
	.4	0 0	0 0	0 .4	1 1	1 1	.6 .8	1 1	0 0
	.5	0 0	0 0	0 0	1 1	1 1	.5 .8	1 1	0 0
	.6	0 0	0 0	0 0	1 1	1 1	.2 .7	1 1	0 0
	.7	0 0	0 0	0 0	.8 1	1 1	0 .4	.9 1	0 0
	.8	0 0	0 0	0 0	.8 .9	.9 1	0 0	.8 1	[illegible]
	.9	0 0	0 0	0 0	.8 .8	.9 1	0 0	.6 .9	[illegible]
	1	0 0	0 0	0 0	.8 .8	.9 .9	0 0	.4 .4	[illegible]
a_{10}	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	[illegible]
	.1	0 0	0 0	.3 .3	1 1	1 1	1 1	1 1	[illegible]
	.2	0 0	0 0	.1 .2	1 1	1 1	1 1	1 1	[illegible]
	.3	0 0	0 0	.1 .2	1 1	1 1	.9 1	1 1	[illegible]
	.4	0 0	0 0	.1 .1	1 1	1 1	.7 1	1 1	[illegible]
	.5	0 0	0 0	0 .1	1 1	1 1	.4 1	1 1	[illegible]
	.6	0 0	0 0	0 0	1 1	1 1	.4 .8	1 1	[illegible]
	.7	0 0	0 0	0 0	1 1	1 1	0 .6	1 1	[illegible]
	.8	0 0	0 0	0 0	1 1	1 1	0 .1	1 1	[illegible]
	.9	0 0	0 0	0 0	1 1	.9 1	0 0	1 1	[illegible]
	1	0 0	0 0	0 0	1 1	.9 .9	0 0	.7 [illegible]	[illegible]

Т а б л и ц а 17.5

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
a_1	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	.5 .5	1 1	.1 .1	.8 .8	1 1	.3 .3	1 1	.9 .9	.7 .7
	.2	1 1	.3 .4	1 1	0 0	.6 .7	.9 .9	.2 .3	1 1	.7 .8	.4 .6
	.3	1 1	.1 .3	1 1	0 0	.5 .7	.8 .9	.2 .3	1 1	.2 .8	.1 .4
	.4	1 1	0 .2	1 1	0 0	.4 .7	.6 .9	.1 .2	1 1	.2 .6	0 .1
	.5	1 1	0 0	.9 1	0 0	.2 .5	.1 .8	0 .2	.8 1	0 .1	0 0
	.6	1 1	0 0	.9 1	0 0	.2 .4	0 .8	0 .2	.5 1	0 .1	0 0
	.7	1 1	0 0	.7 .9	0 0	.1 .3	0 .3	0 0	.1 .7	0 0	0 0
	.8	1 1	0 0	.3 .9	0 0	0 .2	0 0	0 0	0 .5	0 0	0 0
	.9	1 1	0 0	.3 .6	0 0	0 0	0 0	0 0	0 .1	0 0	0 0
	1	1 1	0 0	.3 .3	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
a_2	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	1 1	1 1	1 1	.3 .3	1 1	.2 .2	1 1	.3 .3	.2 .2
	.2	1 1	1 1	1 1	1 1	.1 .2	1 1	.2 .2	1 1	.1 .1	.1 .1
	.3	1 1	1 1	1 1	1 1	.1 .2	1 1	0 .2	1 1	.1 .1	0 .1
	.4	1 1	1 1	.9 1	.9 1	0 .1	1 1	0 .2	1 1	.1 .1	0 .1
	.5	1 1	1 1	.7 1	.8 1	0 .1	1 1	0 .1	.8 1	0 .1	0 0
	.6	1 1	1 1	.7 1	.7 1	0 0	1 1	0 0	.5 1	0 .1	0 0
	.7	1 1	1 1	.4 .8	.6 .8	0 0	.9 1	0 0	.2 .9	0 0	0 0
	.8	1 1	1 1	.3 .7	.5 .6	0 0	.8 1	0 0	.1 .5	0 0	0 0
	.9	1 1	1 1	.3 .5	.5 .6	0 0	.5 .8	0 0	0 .2	0 0	0 0
	1	1 1	1 1	.3 .3	.4 .4	0 0	.5 .7	0 0	0 0	0 0	0 0
a_3	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	0 0	1 1	0 0	.4 .4	1 1	0 0	1 1	.3 .3	.2 .2
	.2	1 1	0 0	1 1	0 0	.3 .3	1 1	0 0	.9 .9	.1 .3	.1 .2
	.3	.7 1	0 0	1 1	0 0	.1 .3	1 1	0 0	.9 .9	.1 .3	.1 .2
	.4	.7 1	0 0	1 1	0 0	0 .3	1 1	0 0	.7 .9	.1 .2	0 .1
	.5	.2 .8	0 0	1 1	0 0	0 .1	.7 1	0 0	.4 .9	.1 .1	0 .1
	.6	0 .7	0 0	1 1	0 0	0 .1	.6 1	0 0	.3 .8	0 .1	0 .1
	.7	0 .4	0 0	1 1	0 0	0 0	.1 1	0 0	0 .6	0 .1	0 0
	.8	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 .4	0 0	0 .4	0 0	0 0
	.9	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	1	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
a_4	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	1 1	.7 .7	1 1	1 1	.5 .5	.9 .9	.7 .7	.5 .5	.3 .3
	.2	1 1	1 1	.7 .7	1 1	1 1	.4 .4	.9 .9	.6 .7	.3 .3	.3 .3
	.3	1 1	1 1	.3 .5	1 1	1 1	.1 .3	.5 .9	.3 .7	.1 .3	.2 .3
	.4	1 1	.9 1	0 .5	1 1	1 1	0 .3	.4 .8	.2 .7	0 .3	.1 .3
	.5	.8 1	.7 1	0 .4	1 1	1 1	0 .1	.2 .7	.2 .4	0 0	0 .1
	.6	.5 1	.6 1	0 .1	1 1	1 1	0 0	.1 .4	0 .2	0 0	0 0
	.7	.2 .8	.4 .8	0 0	1 1	1 1	0 0	0 .2	0 .2	0 0	0 0
	.8	.1 .5	.1 .6	0 0	1 1	1 1	0 0	0 .1	0 0	0 0	0 0
	.9	.1 .1	.1 .2	0 0	1 1	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	1	0 0	.1 .1	0 0	1 1	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
a_5	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	.9 .9	.5 .5	1 1	1 1	0 0	.9 .9	.6 .6	.1 .1	.1 .1
	.2	1 1	.9 .9	.2 .4	1 1	1 1	0 0	.9 .9	.4 .4	0 0	.1 .1
	3	1 1	.7 .8	.1 .4	.8 1	1 1	0 0	.6 .9	0 .3	0 0	.1 .1
	.4	.9 1	.5 .8	0 .2	.8 1	1 1	0 0	.5 .8	0 .2	0 0	0 .1
	.5	.8 1	.5 .7	0 .1	.8 .8	1 1	0 0	.1 .7	0 .1	0 0	0 .1
	.6	[illegible] .9	.1 .5	0 0	.7 .8	1 1	0 0	0 .5	0 .1	0 0	0 .1
	.7	[illegible] .8	0 .4	0 0	.4 .8	1 1	0 0	0 .2	0 0	0 0	0 0
	.8	[illegible]	0 0	0 0	.1 .7	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	.9	[illegible]	[illegible] 0	0 0	.1 .4	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	1	[illegible]	[illegible]	0 0	.1 .1	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0

Окончание табл. 17.5

		a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	1 1	1 1	.2 .2	0 0	1 1	0 0	.1 .1	.7 .7	.2 .2
	.2	1 1	.9 1	1 1	.1 .2	0 0	1 1	0 0	0 .1	.7 .7	.1 .1
	.3	.8 1	.8 1	1 1	0 .2	0 0	1 1	0 0	0 .1	.6 .7	0 .1
	4	.6 1	.7 .9	1 1	0 .1	0 0	1 1	0 0	0 .1	.4 .7	0 .1
a_6	.5	.3 .8	.2 .9	1 1	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	.2 .6	0 0
	.6	.1 .7	.1 .6	1 1	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	.1 .4	0 0
	.7	.1 .3	.1 .3	.8 1	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 .3	0 0
	.8	0 .1	.1 .1	.5 1	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0
	.9	0 0	0 0	.4 .6	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0
	1	0 0	0 0	.3 .3	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	1 1	1 1	1 1	.9 .9	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.2	1 1	1 1	1 1	.9 .9	.9 .9	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.3	1 1	1 1	.9 1	.8 .9	.5 .8	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.4	1 1	1 1	.9 1	.7 .9	.4 .8	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
a_7	.5	1 1	1 1	.6 .9	.5 .8	.1 .6	.6 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.6	1 1	1 1	.3 .9	.3 .8	0 .4	.5 .9	1 1	1 1	1 1	1 1
	.7	1 1	.9 1	.2 .8	.1 .5	0 .3	.3 .7	1 1	1 1	1 1	.9 1
	.8	.8 1	.9 1	0 .3	0 .3	0 .2	.2 .5	1 1	1 1	1 1	.9 1
	.9	.7 1	.7 .8	0 .2	0 0	0 0	.2 .3	1 1	.9 1	.9 1	.8 1
	1	.6 .6	.7 .7	0 0	0 0	0 0	.2 .2	1 1	.8 .8	.9 .9	.8 .8
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	1 1	.4 .4	1 1	.7 .7	1 1	.9 .9	1 1	1 1	1 1
	.2	1 1	1 1	.1 .1	1 1	.5 .6	1 1	.9 .9	1 1	1 1	1 1
	.3	.9 1	1 1	0 .1	1 1	.5 .6	1 1	.8 .9	1 1	.8 1	1 1
	.4	.9 1	.6 1	0 0	1 1	.4 .6	1 1	.7 .9	1 1	.8 1	1 1
a_8	.5	.8 1	.6 .9	0 0	1 1	.2 .5	.9 1	.1 .9	1 1	.5 .8	1 1
	.6	.7 .9	.4 .8	0 0	1 1	.2 .5	.8 1	.1 .7	1 1	.2 .8	1 1
	.7	.5 .8	.2 .6	0 0	1 1	0 .2	.4 .9	0 .3	1 1	0 .6	1 1
	.8	.2 .8	0 .4	0 0	1 1	0 .2	.2 .8	0 .1	1 1	0 .3	1 1
	.9	.2 .4	0 .2	0 0	1 1	0 0	.2 .4	0 0	1 1	0 0	1 1
	1	.2 .2	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	1 1	0 0	1 1
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	1 1	.7 .7	1 1	0 0	1 1	.1 .1	.4 .4	1 1	0 0
	.2	1 1	1 1	.7 .7	1 1	0 0	1 1	.1 .1	.4 .4	1 1	0 0
	.3	1 1	1 1	.5 .7	1 1	0 0	1 1	.1 .1	.2 .4	1 1	0 0
	.4	1 1	1 1	.3 .7	1 1	0 0	1 1	0 .1	.2 .4	1 1	0 0
a_9	.5	1 1	1 1	.1 .6	.9 1	0 0	1 1	0 0	.1 .2	1 1	0 0
	.6	1 1	1 1	0 .3	.9 1	0 0	1 1	0 0	0 .2	1 1	0 0
	.7	1 1	1 1	0 .1	.7 1	0 0	1 1	0 0	0 .1	1 1	0 0
	.8	1 1	1 1	0 0	.7 .8	0 0	1 1	0 0	0 0	1 1	0 0
	.9	1 1	1 1	0 0	.6 .7	0 0	1 1	0 0	0 0	1 1	0 0
	1	1 1	1 1	0 0	.6 .6	0 0	1 1	0 0	0 0	1 1	0 0
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	1 1	.7 .7	.8 .8	0 0	.2 .2	0 0	.8 .8	0 0	1 1
	.2	1 1	1 1	.6 .6	.8 .8	0 0	.2 .2	0 0	.7 .8	0 0	1 1
	.3	1 1	1 1	.6 .6	.4 .8	0 0	.2 .2	0 0	.5 .8	0 0	1 1
	.4	1 1	1 1	.4 .5	.2 .7	0 0	.2 .2	0 0	.4 .8	0 0	1 1
a_{10}	.5	1 1	1 1	.2 .5	.2 .3	0 0	.2 .2	0 0	.2 .7	0 0	1 1
	.6	1 1	1 1	.1 .4	.2 .2	0 0	.1 .2	0 0	.1 .5	0 0	1 1
	.7	1 1	1 1	.1 .3	.2 .2	0 0	0 .2	0 0	0 .2	0 0	1 1
	.8	1 1	1 1	0 .1	0 .2	0 0	0 .1	0 0	0 .1	0 0	1 1
	.9	1 1	1 1	0 .1	0 .2	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1
	1	1 1	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1

Таблица 17.6

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	1 1	1 1	.9 .9	.1 .1	.8 .8	1 1	.9 .9
	.2	1 1	1 1	1 1	.8 .9	.1 .1	.7 .8	1 1	.7 .8
	.3	1 1	1 1	1 1	.6 .9	0 0	.4 .8	1 1	.3 .8
	.4	1 1	1 1	.9 1	.3 .9	0 0	.1 .7	1 1	.1 7
b_1	.5	1 1	1 1	.8 1	0 .6	0 0	.1 .4	.8 1	.1 .3
	.6	1 1	1 1	.7 1	0 .5	0 0	0 .2	.8 1	.1 .1
	.7	1 1	1 1	.3 .8	0 0	0 0	0 .1	.7 1	0 .1
	.8	1 1	1 1	.1 .7	0 0	0 0	0 0	.4 .8	0 .1
	.9	1 1	1 1	.1 .3	0 0	0 0	0 0	.3 .7	0 0
	1	1 1	1 1	.1 .1	0 0	0 0	0 0	.3 .3	0 0
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	1 1	.8 .8	.8 .8	0 0	.8 .8	.9 .9	.2 .2
	.2	1 1	1 1	.7 .8	.8 .8	0 0	.6 .7	.8 .9	.2 .2
	.3	1 1	1 1	.3 .8	.7 .8	0 0	.5 .7	.4 .9	0 .1
	.4	.9 1	1 1	.1 .7	.2 .8	0 0	.3 .7	.1 .6	0 .1
b_2	.5	.6 1	1 1	0 .4	.1 .7	0 0	0 .5	0 .5	0 0
	.6	.6 .9	1 1	0 .2	0 .3	0 0	0 .3	0 .2	0 0
	.7	.4 .7	1 1	0 .1	0 .1	0 0	0 0	0 0	0 0
	.8	.2 .7	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	.9	.2 .6	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	1	.2 .2	1 1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	0 0	0 0	1 1	0 0	1 1	0 0	1 1	0 0
	.2	0 0	0 0	1 1	0 0	.9 1	0 0	1 1	0 0
	.3	0 0	0 0	1 1	0 0	.9 .9	0 0	1 1	0 0
	.4	0 0	0 0	1 1	0 0	.8 .9	0 0	1 1	0 0
b_3	.5	0 0	0 0	1 1	0 0	.2 .9	0 0	1 1	0 0
	.6	0 0	0 0	1 1	0 0	.1 .7	0 0	1 1	0 0
	.7	0 0	0 0	1 1	0 0	.1 .2	0 0	.8 1	0 0
	.8	0 0	0 0	1 1	0 0	0 .1	0 0	.1 1	0 0
	.9	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	.1 .7	0 0
	1	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0	0 0	.1 .1	0 0
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	.8 .8	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.2	1 1	.8 .8	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.3	.9 1	.3 .8	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	.7 1
	.4	.5 1	.1 .7	.9 1	1 1	1 1	.9 1	1 1	.4 1
b_4	.5	.3 .7	0 .3	.4 1	1 1	1 1	.4 1	.8 1	0 .9
	.6	.1 .5	0 .1	.4 1	1 1	1 1	.2 .9	.7 1	0 .6
	.7	0 .4	0 0	.1 .4	1 1	1 1	0 .6	.5 1	0 0
	.8	0 .2	0 0	0 .4	1 1	1 1	0 .2	.4 .8	0 0
	.9	0 0	0 0	0 0	1 1	1 1	0 0	.3 .4	0 0
	1	0 0	0 0	0 0	1 1	1 1	0 0	.3 .3	0 0

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	.8 .8	.3 .3	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.2	.6 .7	.2 .2	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.3	.6 .7	0 .2	.9 1	1 1	1 1	.9 1	1 1	.6 1
	.4	.5 .6	0 .2	.6 1	1 1	1 1	.8 1	1 1	.3 1
b_5	.5	.4 .6	0 .1	.5 1	1 1	1 1	.5 1	1 1	.1 .7
	.6	0 .6	0 0	.4 .6	1 1	1 1	.3 .9	1 1	0 .4
	.7	0 .3	0 0	.1 .6	1 1	1 1	0 .6	1 1	0 .1
	.8	0 0	0 0	0 .5	1 1	1 1	0 .3	1 1	0 0
	.9	0 0	0 0	0 .1	1 1	1 1	0 0	.8 1	0 0
	1	0 0	0 0	0 0	1 1	1 1	0 0	.8 .8	0 0
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	.9 .9	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.2	.8 .9	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.3	.3 .9	1 1	1 1	.5 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.4	.1 .8	.8 1	1 1	.3 1	1 1	1 1	1 1	.8 1
b_6	.5	0 .4	.5 1	.5 1	.3 .5	.7 1	1 1	1 1	.4 1
	.6	0 .1	.3 .8	.1 1	0 .3	.5 1	1 1	.9 1	.2 .8
	.7	0 0	.1 .6	0 .6	0 .3	.2 1	1 1	.3 .9	0 .6
	.8	0 0	.1 .3	0 .1	0 0	0 .7	1 1	.1 .9	0 .2
	.9	0 0	.1 .1	0 0	0 0	0 0	1 1	.1 .4	0 0
	1	0 0	.1 .1	0 0	0 0	0 0	1 1	0 0	0 0
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	0 0	0 0	.9 .9	1 1	.1 .1	.1 .1	1 1	1 1
	.2	0 0	0 0	.9 .9	1 1	.1 .1	.1 .1	1 1	.8 .9
	.3	0 0	0 0	.7 .9	.8 .9	0 .1	0 .1	1 1	.6 .9
	.4	0 0	0 0	.5 .9	.5 .9	0 .1	0 .1	1 1	.6 .9
b_7	.5	0 0	0 0	.1 .8	.3 .9	0 0	0 0	1 1	.1 .6
	.6	0 0	0 0	0 .6	.1 .6	0 0	0 0	1 1	0 .6
	.7	0 0	0 0	0 .3	0 .3	0 0	0 0	1 1	0 .1
	.8	0 0	0 0	0 0	0 .1	0 0	0 0	1 1	0 0
	.9	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1	0 0
	1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1	0 0
	0	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1	1 1
	.1	1 1	.2 .2	1 1	1 1	.5 .5	1 1	1 1	1 1
	.2	1 1	.1 .1	1 1	.9 1	.4 .5	.9 1	1 1	1 1
	.3	.5 1	0 .1	1 1	.6 1	.2 .5	.6 1	.9 1	1 1
	.4	.1 1	0 .1	.7 1	.4 1	.1 .4	.3 .9	.7 1	1 1
b_8	.5	.1 .8	0 0	.3 1	.2 .7	0 .3	0 .7	.2 1	1 1
	.6	0 .1	0 0	0 .9	.1 .6	0 .1	0 .5	.1 .8	1 1
	.7	0 .1	0 0	0 .4	0 .2	0 0	0 .1	0 .4	1 1
	.8	0 0	0 0	0 0	0 .1	0 0	0 0	0 0	1 1
	.9	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1
	1	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0	1 1

Опуская многие детали и промежуточные результаты, дальнейшую схему рассуждений можно представить следующим образом. Из табл. 17.4-17.6 для уровней $\alpha = 1, 0.9, 0.8, ... 0.1, 0$ выписываем матрицы M_α, A_α, B_α и находим их свертку $\underset{\sim}{M}^*_\alpha = \underset{\sim}{A}_\alpha \circ \underset{\sim}{M}_\alpha \circ \underset{\sim}{B}_\alpha$:

$\underset{\sim}{M}^*_1 =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	.7	.7	.4	0	0	0	.8	0
a_2	.7	.7	.4	0	0	0	.8	.7
a_3	0	0	.3	0	0	0	.4 .6	0
a_4	0	0	0	0	0	0	0	1
a_5	0	0	0	0	0	0	0	1
a_6	0	0	.3	0	0	0	.3	0
a_7	.6	.6	.4	.9	.9	0	.8	.1 .2
a_8	.2	.2	.2	1	1	0	.8 .9	.5 .6
a_9	.7	.7	.4	.9	.9	0	.8	.5 .6
a_{10}	.7	.7	.4	1	1	0	.8	0

$\underset{\sim}{M}^*_{0.9} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	.9 1	.9 1	.4 .7	0 .1	0 .1	0	.8 1	0 .1
a_2	.9 1	.9 1	.4 .7	.1 .2	.1 .2	0	.8 1	.5 .6
a_3	0	0	.3 5	0	0	0	.5 .8	0
a_4	.1	.1	.1	0 .1	0 .1	0	.2	1
a_5	0	0	0	0	0	0	.2	1
a_6	0	0	.3 .5	.1	.1	0	.4 .6	0
a_7	.7 1	.7 1	.4 .7	.9 1	.9 1	0	.8 1	.2 .8
a_8	.2 .4	.2 .4	.2 .4	1	1	0	1	.7 .9
a_9	.9 1	.9 1	.4 .7	.9 1	.9 1	0	.8 1	.6 .7
a_{10}	.9 1	.9 1	.4 .7	1	1	0	1	0 .2

$\underset{\sim}{M}^*_{0.8} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	1	1	.5 .9	0 .5	0 .5	0 .3	1	0 .2
a_2	1	1	.5 .9	.1 .5	.1 .5	0 .3	1	.5 .6
a_3	0 .2	0 .2	.3 .9	0 .4	0 .4	0 .3	.7 1	0 .1
a_4	.1 .5	.1 .5	.1 .5	0 .3	0 .3	0 .3	.2 .5	1
a_5	0 .3	0 .3	0 .3	0 .3	0 .3	0 .3	.2 .5	1
a_6	0 .2	0 .2	.3 .9	.1 .5	.1 .5	0 .3	.5 1	0 .1
a_7	.8 1	.8 1	.5 .9	.9 1	.9 1	0 .3	.9 1	.6 1
a_8	.2 .8	.2 .8	.2 .8	1	1	0 .3	1	.9 1
a_9	1	1	.5 .9	.9 1	.9 1	0 .3	1	.7 .8
a_{10}	1	1	.5 .9	1	1	0 .3	1	0 .2

$\underset{\sim}{M}^*_{0.7} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	1	1	.8 1	.1 .8	.1 .8	0 .6	1	.1 .4
a_2	1	1	.8 1	.2 .9	.2 .9	0 .6	1	.6 .8
a_3	0 .4	0 .4	.6 1	.1 .9	.1 .9	0 .6	.8 1	0 .4
a_4	.2 .8	.2 .8	.2 .8	.1 .8	.1 .8	0 .6	.3 .8	1
a_5	0 .8	0 .8	0 .8	0 .8	0 .8	0 .6	.3 .8	1
a_6	.1 .4	.1 .3	.6 1	.1 .9	.1 .9	0 .6	.8 1	.1 .3
a_7	1	1	.8 1	1	1	0 .6	1	.8 1
a_8	.5 .8	.5 .8	.5 .8	1	1	0 .6	1	1
a_9	1	1	.8 1	1	1	0 .6	1	.7 1
a_{10}	1	1	.8 1	1	1	0 .6	1	.2 .6

$\underset{\sim}{M}^*_{0.6} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	1	1	1	.6 .9	.6 .9	.3 .9	1	.2 .8
a_2	1	1	1	.6 1	.6 1	.3 .9	1	.7 1
a_3	.3 .7	.3 .7	.9 1	.6 1	.6 1	.3 .9	1	.2 .7
a_4	.5 1	.5 1	.5 1	.4 .9	.4 .9	.3 .9	.6 1	1
a_5	.4 .9	.4 .9	.4 .9	.4 .9	.4 .9	.3 .9	.6 1	1
a_6	.3 .7	.3 .7	.9 1	.6 1	.6 1	.3 .9	1	.2 .7
a_7	1	1	1	1	1	.4 .9	1	1
a_8	.7 .9	.7 .9	.7 1	1	1	.4 .9	1	1
a_9	1	1	1	1	1	.3 .9	1	.9 1
a_{10}	1	1	1	1	1	.4 .9	1	.2 .8

$\underset{\sim}{M}^*_{0.5} =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	1	1	1	.6 1	.6 1	.5 1	1	.5 1
a_2	1	1	1	.7 1	.7 1	.5 1	1	.8 1
a_3	.4 .9	.3 .9	1	.7 1	.7 1	.5 1	1	.4 .9
a_4	.8 1	.8 1	.8 1	.6 1	.6 1	.5 1	.8 1	1
a_5	.8 1	.8 1	.8 1	.6 1	.6 1	.5 1	.8 1	1
a_6	.4 .8	.3 .8	1	.7 1	.7 1	.5 1	1	.4 .9
a_7	1	1	1	1	1	.5 1	1	1
a_8	.8 1	.8 1	.8 1	1	1	.5 1	1	1
a_9	1	1	1	1	1	.5 1	1	.9 1
a_{10}	1	1	1	1	1	.5 1	1	.5 1

$$\underset{\sim}{M}^{*}_{0.4} =$$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	1	1	1	.8 1	.8 1	.8 1	1	.8 1
a_2	1	1	1	1	1	.8 1	1	.9 1
a_3	.7 1	.7 1	1	1	1	.8 1	1	.7 1
a_4	1	1	1	.8 1	.8 1	.8 1	1	1
a_5	.9 1	.9 1	.9 1	.8 1	.8 1	.8 1	1	1
a_6	.6 1	.6 1	1	1	1	.8 1	1	.7 1
a_7	1	1	1	1	1	.9 1	1	1
a_8	.9 1	.9 1	1	1	1	.9 1	1	1
a_9	1	1	1	1	1	.9 1	1	1
a_{10}	1	1	1	1	1	.9 1	1	.8 1

$$\underset{\sim}{M}^{*}_{0.3} =$$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	1	1	1	1	1	.9 1	1	1
a_2	1	1	1	1	1	1	1	1
a_3	.9 1	.9 1	1	1	1	.9 1	1	.9 1
a_4	1	1	1	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	1	.9 1	1	1
a_6	.8 1	.8 1	1	1	1	.9 1	1	.9 1
a_7	1	1	1	1	1	1	1	1
a_8	.9 1	.9 1	1	1	1	1	1	1
a_9	1	1	1	1	1	1	1	1
a_{10}	1	1	1	1	1	1	1	1

$$\underset{\sim}{M}^{*}_{0.2} =$$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	1	1	1	1	1	1	1	1
a_2	1	1	1	1	1	1	1	1
a_3	1	1	1	1	1	1	1	1
a_4	1	1	1	1	1	1	1	1
a_5	1	1	1	1	1	1	1	1
a_6	1	1	1	1	1	1	1	1
a_7	1	1	1	1	1	1	1	1
a_8	1	1	1	1	1	1	1	1
a_9	1	1	1	1	1	1	1	1
a_{10}	1	1	1	1	1	1	1	1

Собрав всю информацию из матриц $\underset{\sim}{M}^{*}_{\alpha}$, реконструируем экспертон, представленный в табл.17.7.

Перейдем сейчас к восстановлению элементарных вероятностей по экспертонам, заданным табл. 17.4 и 17.7. Получим соответственно табл. 17.8 и 17.9. Отметим, что данные из табл. 17.8 совпадают с данными из табл. 17.1, разделенными на 10.

Данные из табл. 17.8, 17.9 дают возможность вычислить математические ожидания значений как дискретных случайных величин для левых и

Т а б л и ц а 17.7

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1	1	1	1	1
	.3	1	1	1	1	1	.9 1	1	1
	.4	1	1	1	.8 1	.8 1	.8 1	1	.8 1
a_1	.5	1	1	1	.6 .1	.6 1	.5 1	1	.5 1
	.6	1	1	1	.6 .9	.6 .9	.3 .9	1	.2 .8
	.7	1	1	.8 1	.1 .8	.1 .8	0 .6	1	.1 .4
	.8	1	1	.5 .9	0 .5	0 .5	0 .3	1	0 .2
	.9	.9 1	.9 1	.4 .7	0 .1	0 .1	0	.8 1	0 .1
	1	.7	.7	.4	0	0	0	.8	0
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1	1	1	1	1
	.3	1	1	1	1	1	1	1	1
	.4	1	1	1	1	1	.8 1	1	.9 1
a_2	.5	1	1	1	.7 1	.7 1	.5 1	1	.8 1
	.6	1	1	1	.6 1	.6 1	.3 .9	1	.7 1
	.7	1	1	.8 1	.2 .9	.2 .9	0 .6	1	.6 .8
	.8	1	1	.5 .9	.1 .5	.1 .5	0 .3	1	.5 .6
	.9	.9 1	.9 1	.4 .7	.1 .2	.1 .2	0	.8 1	.5 .6
	1	.7	.7	.4	0	0	0	.8	.4
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1	1	1	1	1
	.3	.9 1	.9 1	1	1	1	.9 1	1	.9 1
	.4	.7 1	.7 1	1	1	1	.8 1	1	.7 1
a_3	.5	.4 .9	.3 .9	1	.7 1	.7 1	.5 1	1	.4 .9
	.6	.3 .7	.3 .7	.9 1	.6 1	.6 1	.3 .9	1	.2 .7
	.7	0 .4	0 .4	.6 .1	.1 .9	.1 .9	0 .6	.8 1	0 .4
	.8	0 .2	0 .2	.3 .9	0 .4	0 .4	0 .3	.7 1	0 .1
	.9	0	0	.3 .5	0	0	0	.5 .8	0
	1	0	0	.3	0	0	0	.4 .6	0
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1	1	1	1	1
	.3	1	1	1	1	1	1	1	1
	.4	1	1	1	.8 1	.8 1	.8 1	1	1
a_4	.5	.8 1	.8 1	.8 1	.6 1	.6 1	.5 1	.8 1	1
	.6	.5 1	.5 1	.5 1	.4 .9	.4 .9	.3 .9	.6 1	1
	.7	.2 .8	.2 .8	.2 .8	.1 .8	.1 .8	0 .6	.3 .8	1
	.8	.1 .5	.1 .5	.1 .5	0 .3	0 .3	0 .3	.2 .5	1
	.9	.1	.1	.1	0 .1	0 .1	0	.2	1
	1	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1	1	1	1	1
	.3	1	1	1	1	1	.9 1	1	1
	.4	.9 1	.9 1	.9 1	.8 1	.8 1	.8 1	1	1
a_5	.5	.8 1	.8 1	.8 1	.6 1	.6 1	.5 1	.8 1	1
	.6	.4 .9	.4 .9	.4 .9	.4 .9	.4 .9	.3 .9	.6 1	1
	.7	0 .8	0 .8	0 .8	0 .8	0 .8	0 .6	.3 .8	1
	.8	0 .3	0 .3	0 .3	0 .3	0 .3	0 .3	.2 .5	1
	.9	0	0	0	0	0	0	.2	1
	1	0	0	0	0	0	0	0	1
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1	1	1	1	1
	.3	.8 1	.8 1	1	1	1	.9 1	1	.9 1
	.4	.6 1	.6 1	1	1	1	.8 1	1	.7 1
a_6	.5	.4 .8	.3 .8	1	.7 1	.7 1	.5 1	1	.4 .9
	.6	.3 .7	.3 .7	.9 1	.6 1	.6 1	.3 .9	1	.2 .7
	.7	.1 .4	.1 .3	.6 1	.1 .9	.1 .9	0 .6	.8 .1	.1 .3
	.8	0 .2	0 .2	.3 .9	.1 .5	.1 .5	0 .3	.5 1	0 .1
	.9	0	0	.3 .5	.1	.1	0	.4 .6	0
	1	0	0	.3	0	0	0	.3	0
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1	1	1	1	1
	.3	1	1	1	1	1	1	1	1
	.4	1	1	1	1	1	.9 1	1	1
a_7	.5	1	1	1	1	1	.5 1	1	1
	.6	1	1	1	1	1	.4 .9	1	1
	.7	1	1	.8 1	1	1	0 .6	1	.8 1
	.8	.8 1	.8 1	.5 .9	.9 1	.9 1	0 .3	.9 1	.6 1
	.9	.7 1	.7 1	.4 .7	.9 1	.9 1	0	.8 1	.2 .8
	1	.6	.6	.4	.9	.9	0	.8	.1 .2
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1	1	1	1	1
	.3	.9 1	.9 1	1	1	1	1	1	1
	.4	.9 1	.9 1	1	1	1	.9 1	1	1
a_8	.5	.8 1	.8 1	.8 1	1	1	.5 1	1	1
	.6	.7 .9	.7 .9	.7 1	1	1	.4 .9	1	1
	.7	.5 .8	.5 .8	.5 .8	1	1	0 .6	1	1
	.8	.2 .8	.2 .8	.2 .8	1	1	0 .3	1	.9 1
	.9	.2 .4	.2 .4	.2 .4	1	1	0	1	.7 .9
	1	.2	.2	.2	1	1	0	.8 .9	.5 .6
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1	1	1	1	1
	.3	1	1	1	1	1	1	1	1
	.4	1	1	1	1	1	.9 1	1	1
a_9	.5	1	1	1	1	1	.5 1	1	.9 1
	.6	1	1	1	1	1	.3 .9	1	.9 1
	.7	1	1	.8 1	1	1	0 .6	1	.7 1
	.8	1	1	.5 .9	.9 1	.9 1	0 .3	1	.7 .8
	.9	.9 1	.9 1	.4 .7	.9 1	.9 1	0	.8 1	.6 .7
	1	.7	.7	.4	.9	.9	0	.8	.5 .6
	0	1	1	1	1	1	1	1	1
	.1	1	1	1	1	1	1	1	1
	.2	1	1	1	1	1	1	1	1
	.3	1	1	1	1	1	1	1	1
	.4	1	1	1	1	1	.9 1	1	.8 1
a_{10}	.5	1	1	1	1	1	.5 1	1	.5 1
	.6	1	1	1	1	1	.4 .9	1	.2 .8
	.7	1	1	.8 1	1	1	0 .6	1	.2 .6
	.8	1	1	.5 .9	1	1	0 .3	1	0 .2
	.9	.9 1	.9 1	.4 .7	1	1	0	1	0 .2
	1	.7	.7	.4	1	1	0	.8	0

Таблица 17.8

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
	0								
	.1						.2		
	.2				.1 .1		.4 .3		
	.3				.4	.2	.3 .2		.2
	.4				.4 .1	.2	.4		.3
a_1	.5				.1 .6	.2 .1			.3 .2
	.6			.2	.1	.3 .1	.1		.1 .4
	.7			.3 .1	.1	.1 .5			.1 .3
	.8	.1	.4 .2	.1 .2		.3	.1	.2	
	.9	.2 .3	.5 .7	.3				.2	.1
	1	.7 .7	.1 .1	.4 .4				.8 .8	
	0	.4 .4	.7 .7				.3 .2		.7 .7
	.1	.4 .1	.1			.2 .1	.3 .2		.3 .3
	.2	.1 .3	.2 .1	.1		.4 .1	.2 .1	.2	
	.3	.1 .1	.2	.1	.2	.2	.2 .1	.1	
	.4	.1		.3 .1	.4 .1	.2 .2	.1	.4	
a_2	.5			.2	.3 .2	.3	.3	.1 .1	
	.6			.3 .5	.1 .2	.3		.3 .4	
	.7			.1	.4			.2	
	.8			.3				.2	
	.9				.1				
	1								
	0		.6 .6			.1 .1	.1 .1		
	.1	.1 .1	.1 .1				.5 .4		
	.2	.2	.3 .2		.2	.1 .1	.2 .1		.1 .1
	.3	.2 .1	.1		.2	.1	.1		.2
	.4	.2 .2			.2	.2	.2 .1		.3 .1
a_3	.5	.1		.1		.5 .2	.1		.2 .3
	.6	.3 .2		.3	.6 .1	.4	.1	.2	.2 .2
	.7	.1		.3 .1	.4	.2		.1	.3
	.8	.2		.4	.3			.2 .2	
	.9			.2				.1 .2	
	1			.3 .3				.4 .6	
	0	.5 .5	1 1	.4 .4	.4 .4		.1 .1		
	.1	.2 .1		.4 .2	.1 .1	.1	.3 .3		
	.2	.1 .1		.1 .1	.2	.1	.2		
	.3	.2 .1		.1 .2	.2 .1	.2	.1	.1	
	.4	.1		.1	.1	.4	.2	.2	
a_4	.5	.1			.1 .2	.3 .2	.2	.1 .2	
	.6				.1	.4	.1 .2	.4	
	.7					.2	.1	.2 .3	.1
	.8					.1	.1	.4	.2 .1
	.9							.1	.2 .3
	1								.5 .6
	0	.6 .6	.9 .9	.7 .7	.5 .5	.7 .7	.1 .1		
	.1	.1 .1			.1 .1	.2 .1	.2 .1		
	.2		.1 .1	.1	.1	.1	.2		
	.3	.1		.1	.2	.1	.3 .3		
	.4	.2 .1		.1	.1 .1	.1	.1 .1	.3	
a_5	.5	.1		.1 .1	.1		.1	.2	
	.6			.1	.1		.4	.2 .2	
	.7				.1			.1 .4	
	.8	.1						.2	
	.9							.2 .2	
	1								1 1

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
	0	.1 .1	1 1		[illegible]		[illegible]		1 1
	.1	.4 .3			1		[illegible]		
	.2	.2 .2			.1 .1			.3	
	.3	.2 .1			.1		.3	.1 .2	
	.4	.1		.3	.2 .1	[illegible]		.3	
a_6	.5	.1 .2		.1	.3 .2	.1	.2	.1 .2	
	.6			.4 .3	.2	.5 .1	.1	.1 .2	
	.7			.1 .3	.2	.4		.2	
	.8			.1 .4	.1	.1 .4		.1	
	.9				.1	.1		.1 .1	
	1								
	0	.1 .1	.7 .7						
	.1		.2 .1						
	.2		.1 .1		.1		.1		
	.3		.1				.1		
	.4	.4		.3	.2 .1		.7		
a_7	.5	.3		.2 .1	.2	.2	.6		
	.6	.2 .2		.3 .1	.1	.4 .1	.1 .1	.1	.2
	.7	.4		.5	.2 .2	.2	.1	.2	.2
	.8	.3		.1 .1	.2 .4	.2 .4	.2	.1 .1	.4 .2
	.9			.1 .2	.2	.2 .1		.4 .6	.1 .6
	1				.1	.2		.2 .3	.1 .2
	0		1 1			.1 .1	.2 .2		.8 .8
	.1			.2	.1	.1 .1	.2 .1		.2 .2
	.2	.1		.1 .1			.3		
	.3	.4 .1		.1 .2	.1 .1	.3	.2 .1		
	.4	.2		.2 .1	.2	.1 .2	.1 .4		
a_8	.5	.2 .2		.1 .1		.2 .1	.1		
	.6	.1 .3		.3	.1 .3	.1	.1	.1	
	.7	.4		.4	.2 .1	.2			
	.8			.1	.2 .3	.1 .2		.2 .1	
	.9				.1	.1			
	1				.1 .1			.7 .9	
	0	1 1	1 1	.4 .4			.2 .2		1 1
	.1			.3 .1					
	.2			.1			.1		
	.3			.2 .1			.1		
	.4			.4			.1		
a_9	.5						.3 .1		
	.6				.2		.2 .3	.1	
	.7				.1	.1	.4	.1	
	.8				.1			.2 .1	
	.9					.1		.2 .5	
	1				.8 .8	.9 .9		.4 .4	
	0	1 1	1 1	.7 .7					1 1
	.1			.2 .1					
	.2						.1		
	.3			.1			.2		
	.4			.1			.3		
a_{10}	.5			.1			.2		
	.6						.4 .2		
	.7						.5		
	.8					.1	.1		
	.9					.1		.3 .3	
	1				1 1	.9 .9		.7 .7	

Т а б л и ц а 17.9

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	0								
	.1						.1		
	.2				.2	.2	.1		
	.3				.2	.2	.3		.2
	.4				.1	.1	.2 .1		.3
	.5				.5 .1	.5 .1	.3 .3		.3 .2
	.6			.2	.1 .3	.1 .3	.3		.1 .4
	.7			.3 .1	.4	.4	.3		.1 .2
	.8	.1	.1	.1 .2	.1	.1		.2	.1
	.9	.2 .3	.2 .3	.3				.2	.1
	1	.7 .7	.7 .7	.4 .4				.8 .8	
a_2	0								
	.1								
	.2								
	.3						.2		.1
	.4				.3	.3	.3		.1
	.5				.1	.1	.2 .1		.1
	.6			.2	.4 .1	.4 .1	.3 .3		.1 .2
	.7			.3 .1	.1 .4	.1 .4	.3		.1 .2
	.8	.1	.1	.1 .2	.3	.3	.3	.2	
	.9	.2 .3	.2 .3	.3	.1 .2	.1 .2		.2	.1 .2
	1	.7 .7	.7 .7	.4 .4				.8 .8	.4 .4
a_3	0								
	.1								
	.2	.1	.1				.1		.1
	.3	.2	.2				.1		.2
	.4	.3 .1	.4 .1		.3	.3	.3		.3 .1
	.5	.1 .2	.2	.1	.1	.1	.2 .1		.2 .2
	.6	.3 .3	.3 .3	.3	.5 .1	.5 .1	.3 .3	.2	.2 .3
	.7	.2	.2	.3 .1	.1 .5	.1 .5	.3	.1	.3
	.8	.2	.2	.4	.4	.4	.3	.2 .2	.1
	.9			.2				.1 .2	
	1			.3 .3				.4 .6	
a_4	0								
	.1								
	.2								
	.3				.2	.2	.2		
	.4	.2	.2	.2	.2	.2	.3	.2	
	.5	.3	.3	.3	.2 .1	.2 .1	.2 .1	.2	
	.6	.3 .2	.3 .2	.3 .2	.3 .1	.3 .1	.3 .3	.3 .2	
	.7	.1 .3	.1 .3	.1 .3	.1 .5	.1 .5	.3	.1 .3	
	.8	.4	.4	.4	.2	.2	.3	.3	
	.9	.1 .1	.1 .1	.1 .1	.1	.1		.2 .2	
	1								1 1
a_5	0								
	.1								
	.2						.1		
	.3	.1	.1	.1	.2	.2	.1		
	.4	.1	.1	.1	.2	.2	.3	.2	
	.5	.4 .1	.4 .1	.4 .1	.2 .1	.2 .1	.2 .1	.2	
	.6	.4 .1	.4 .1	.4 .1	.4 .1	.4 .1	.3 .3	.3 .2	
	.7	.5	.5	.5	.5	.5	.3	.1 .3	
	.8	.3	.3	.3	.3	.3	.3	.3	
	.9							.2 .2	
	1								1 1

		b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_6	0								
	.1								
	.2	.2	.2				.1		.1
	.3	.2	.2				.1		.2
	.4	.2 .2	.3 .2		.3	.3	.3		.3 .1
	.5	.1 .1	.1	.1	.1	.1	.2 .1		.2 .2
	.6	.2 .3	.2 .4	.3	.5 .1	.5 .1	.3 .3	.2	.1 .4
	.7	.1 .2	.1 .1	.3 .1	.4	.4	.3	.3	.1 .2
	.8	.2	.2	.4	.4	.4	.3	.1 .4	.1
	.9			.2	.1 .1	.1 .1		.1 .3	
	1			.3 .3				.3 .3	
a_7	0								
	.1								
	.2								
	.3						.1		
	.4						.4		
	.5						.1 .1		
	.6			.2			.4 .3		.2
	.7	.2	.2	.3 .1	.1	.1	.3	.1	.2
	.8	.1	.1	.1 .2			.3	.1	.4 .2
	.9	.1 .4	.1 .4	.3	.1	.1		.2	.1 .6
	1	.6 .6	.6 .6	.4 .4	.9 .9	.9 .9		.8 .8	.1 .2
a_8	0								
	.1								
	.2	.1	.1						
	.3						.1		
	.4	.1	.1	.2			.4		
	.5	.1 .1	.1 .1	.1			.1 .1		
	.6	.2 .1	.2 .1	.2 .2			.4 .3		
	.7	.3	.3	.3			.3		.1
	.8	.4	.4	.4			.3		.2 .1
	.9	.2	.2	.2				.2 .1	.2 .3
	1	.2 .2	.2 .2	.2 .2	1 1	1 1		.8 .9	.5 .6
a_9	0								
	.1								
	.2								
	.3						.1		
	.4						.4		.1
	.5						.2 .1		
	.6			.2			.3 .3		.2
	.7			.3 .1	.1	.1	.3		.2
	.8	.1	.1	.1 .2			.3	.2	.1 .1
	.9	.2 .3	.2 .3	.3	.1	.1		.2	.1 .1
	1	.7 .7	.7 .7	.4 .4	.9 .9	.9 .9		.8 .8	.5 .6
a_{10}	0								
	.1								
	.2								
	.3						.1		.2
	.4						.4		.3
	.5						.1 .1		.3 .2
	.6			.2			.4 .3		.2
	.7			.3 .1			.3		.2 .4
	.8	.1	.1	.1 .2			.3		
	.9	.2 .3	.2 .3	.3				.2 .2	.2
	1	.7 .7	.7 .7	.4 .4	1 1	1 1		.8 .8	

правых концов доверительных интервалов. Расчеты по табл. 17.8 приводят к матрице M ($\underset{\sim}{M}$), найденной ранее, а по табл. 17.9 — к следующей матрице:

$\varepsilon(\underset{\sim}{M}^*) =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	.965	.965	.855	.620	.620	.565	.970	.555
a_2	.965	.965	.855	.665	.665	.570	.970	.790
a_3	.525	.520	.805	.635	.635	.565	.890	.515
a_4	.655	.655	.655	.600	.600	.570	.680	1
a_5	.605	.605	.605	.590	.590	.565	.680	1
a_6	.515	.505	.805	.655	.620	.565	.845	.515
a_7	.935	.935	.855	.980	.980	.580	.965	.835
a_8	.725	.725	.740	1	1	.580	.985	.930
a_9	.965	.965	.855	.980	.980	.575	.970	.870
a_{10}	.965	.965	.855	1	1	.580	.980	.575

Так же, как и при использовании упрощенного метода, находим средние значения каждого интервала в этих двух матрицах. В результате приходим к полученной матрице $\overline{M}(\underset{\sim}{M})$ и новой матрице $\overline{\varepsilon}(M^*)$:

$\overline{\varepsilon}(\underset{\sim}{M}^*) =$

	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8
a_1	.96,.97	.96,.97	.81,.90	.51,.73	.51,.73	.45,.68	.96,.98	.46,.65
a_2	.96,.97	.96,.97	.81,.90	.57,.76	.57,.76	.46,.68	.96,.98	.74,.84
a_3	.43,.62	.42,.62	.74,.87	.54,.73	.54,.73	.45,.68	.84,.94	.42,.61
a_4	.57,.74	.57,.74	.57,.74	.49,.71	.49,.71	.46,.68	.61,.75	1
a_5	.51,.70	.51,.70	.51,.70	.48,.70	.48,.70	.45,.68	.61,.75	1
a_6	.42,.61	.41,.60	.74,.87	.56,.75	.56,.68	.45,.68	.80,.89	.43,.60
a_7	.91,.96	.91,.96	.81,.90	.97,.99	.97,.99	.48,.68	.95,.98	.77,.90
a_8	.64,.81	.64,.81	.66,.82	1	1	.48,.68	.98,.99	.91,.95
a_9	.96,.97	.96,.97	.81,.90	.97,.99	.97,.99	.47,.68	.96,.98	.83,.91
a_{10}	.96,.97	.96,.97	.81,.90	1	1	.48,.68	.98	.47,.68

Считая, что полученные средние репрезентативны, можно по ним, как и ранее, выделять накопленные воздействия первого и второго порядков. Значения элементов матрицы $\overline{\varepsilon}(\underset{\sim}{M}^*)$ очень близки к значениям элементов матрицы $\overline{M}(\underset{\sim}{M}^*)$, поэтому разность $\overline{\varepsilon}(\underset{\sim}{M}^*) - \overline{M}(\underset{\sim}{M})$ совпадает с ранее найденной разностью $\overline{M}(\underset{\sim}{M}^*) - \overline{M}(\underset{\sim}{M})$. Таким образом, в этом случае упрощенный метод с осреднением данных оказывается достаточным для получения скрытых воздействий. Интересно, что найденным скрытым воздействиям a_9 на b_1, a_9 на b_2, a_{10} на b_1, a_{10} на b_2 и в меньшей мере a_8 на b_8, a_2 на b_2 в матрице $\overline{\varepsilon}(\underset{\sim}{M}^*)$ усредненных накопленных данных соответствуют также в основном большие значения (они выделены в этой матрице). Понятно, что при других данных таких совпадений может и не быть. Мы, естественно, считаем, что метод, основанный на экспертонах, позволяет использовать все скрытое в них богатство информации.

В заключение отметим, что предложенный здесь подход для выявления скрытых воздействий различных аспектов деятельности предприятия на его конечные цели полезен даже в таком первом приближении. Мы убеждены, что на этом пути можно открыть новые, ценные для практики возможности.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В книге мы попытались дать описание совокупности методов, пригодных для решения определенных задач, связанных с анализом последовательностей причинно-следственных отношений. В разнообразных сферах человеческой деятельности возникает необходимость установить степень влияния (инциденций) элементов некоторого множества на элементы этого же множества или на элементы других множеств. В случае, когда устанавливаются непосредственные (прямые) инциденции, описание сводится к составлению таблицы с двумя входами. Более сложной является задача учета всевозможных промежуточных инциденций как отражения цепочки причинно-следственных отношений, где следствие становится причиной в очередной паре отношений. В предположении, что причин немного и вызываемые ими следствия немногочисленны, интуитивно учитываются не только прямые отношения, но и отношения второго порядка. Но в повседневной деятельности людей, относящейся как к общественным отношениям, так и к области управления, существуют многочисленные взаимосвязи между большим числом явлений, которые, выступая в качестве следствий, становятся причинами очередных отношений. Это приводит к тому, что для человеческого мозга становится практически невозможным установление каждой из косвенных связей, имеющих место в отношениях "причина-следствие". Таким образом, появляется необходимость в разработке эффективных методов перебора всевозможных подобных цепочек. Поскольку в настоящее время мы располагаем средствами обработки информации, способными осуществлять огромное количество операций за чрезвычайно короткое время, можно воспользоваться ими для расширения наших возможностей.

Наша исследовательская работа в этом направлении позволила построить ряд моделей, названных "моделями для исследования скрытых взаимодействий". Они основаны на методах, которые уже использовались при принятии решений в условиях неопределенности [1]: теории нечетких множеств в части, соответствующей нечетким матрицам, теории Ф-нечетких матриц, если эксперты пользуются при оценках доверительными интервалами. Эти две группы методов предполагают, что задание субъективных оценок осуществляется как одним, так и несколькими экспертами одновременно, когда их мнения согласовываются. Выявились также методы, дающие возможность экспертам высказывать мнения независимо друг от друга, так чтобы обобщающие выводы делались на последних этапах. При этом рассмотрены две возможности. Первая требует накопления статистики о количестве экспертов, давших одну и ту же оценку каждому из отношений инцидентности. Такая статистика приводит к элементарным вероятностям и в конечном итоге так же, как при нечетких оценках, к использованию нечетких случайных матриц. Вторая возможность представляет собой обобщение такого пути, поскольку она при сохранении независимости мнений экспертов позволяет им осуществлять оценки с помощью доверительных интервалов, тем самым переходя в область анализа матриц, получаемых из экспертонов.

Книга естественным образом поделена на две части (главы) : теоретическую и прикладную. В первой главе излагаются теоретические модели и дается их обоснование, из чего возникает совокупность методов с широким диапазоном возможностей использования в разнообразных областях человеческой деятельности. Во второй главе рассматривается применение разработанных методов к решению конкретных задач. Конечно, приведены только отдельные примеры из многочисленных возможных применений: мы ограничились четырьмя конкретными случаями. Первым из них выбран редко рассматриваемый в практике управления случай, относящийся к избирательным кампаниям. Речь идет об установлении отношений инцидентности между типичными действиями организаторов во время избирательной кампании и ожидаемым эффектом с учетом промежуточных воздействий первого и второго порядков. Показано, что только этот учет может выявить и восстановить скрытые вначале воздействия, что в конечном итоге приведет к правильной для конкретного кандидата организации избирательной кампании.

Следующие далее три примера представляют типичные аспекты экономической деятельности предприятия: фининсовая проблема, проблема рынков и анализ отношений, существующих между средствами и целями предпринимательской деятельности.

Мы отдаем себе отчет в том, что в книге представлена только минимальная доля широчайших возможностей применения разработанных методов в социальной сфере. Например, можно представить результаты решения этой задачи в области медицины. Существует бесконечно много причин (лекарства, диеты, процедуры и т.п.), оказывающих на тело человека некоторые прямые действия (снижение температуры, похудение, активизация защитных сил организма). Здесь изучены многочисленные случаи непосредственных причинно-следственных отношений, однако остается еще больше возможностей для исследования воздействий второго порядка, которые в связи с огромной сложностью человеческого организма очень трудно установить без помощи формализованных моделей и методов, к которым мы относим и методы, описанные в книге.

Можно было бы и далее перечислять другие области, в которых причинно-следственные отношения необходимо изучать через инциденции второго порядка. Однако в этой книге мы стремились дать первое приближение для организации новых исследований. Надеемся, что предложенные методы получат широкое развитие и применение на благо как отдельного человека, так и общества в целом.

БИБЛИОГРАФИЯ

В данной книге список литературы совсем невелик. Он содержит только те книги, в которых изложены основные методы, использованные при разработке моделей для восстановления скрытых воздействий. Конечно, этот список мы могли бы существенно расширить за счет многочисленных публикаций, имеющих хотя бы какое-то отношение к рассматриваемым проблемам. Однако это ничего или почти ничего не изменило бы в содержании нашей книги.

Хотя в нашей книге нет ссылок на работы Рамона Люля, тем не менее мы ощущали близость наших рассуждений к его идеям. Рамон Люль осуществил огромный вклад в развитие науки управления, который ощущается и в наши дни. В этих строках авторы отдают ему дань самой высокой признательности.

1. A.KAUFMANN y J.GIL ALUJA. Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestion de las empresas. Santiago de Compostela: Milladoiro , 1986. [Имеется перевод : Кофман А., Хил Алуха Х. Введение теории нечетких множеств в управлении предприятиями : Пер. с исп./ Под ред. В.В.Краснопрошина, Н.А.Лепешинского. Мн. : Выш. шк., 1992.]

2. A.KAUFMANN y J.GIL ALUJA. Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre. Barcelona : Hispano Europea, 1987.

3. A.KAUFMANN. Modèles mathématiques pour la simulation inventive. Paris : Albin Michel, 1979.

4. A.KAUFMANN. Introducción a la teoría de los subconjuntos borrosos. Barselona; Ciudad de Mexico : Cecsa, 1983.

5. A.KAUFMANN. Les expertons. Traitement informatique de la connaissance. París : Hermès, 1987.

6. A.KAUFMANN. Nouvelles logiques pourr l'intelligence artificielle. París : Hermès, 1987.

7. A. KAUFMANN. Le paramètrage des moteurs d'inférence. París : Hermès, 1988.

Научное издание

Кофман Арнольд
Хил Алуха Хайме

Модели для исследования скрытых воздействий

Редактор *М.С.Молчанова*
Художник обложки *В.А.Ярошевич*

Подписано в печать с авторского оригинала-макета 23.04.93.
Формат 60x90/16. Бумага тип №2. Офсет. печать. Усл. печ. л. 10.
Усл. кр.-отт. 10,25. Уч.-изд.л. 9,07. Тираж 1000 экз. Заказ 5504.

Издательство «Вышэйшая школа» Министерства информации
Республики Беларусь. Лицензия ЛВ №5. 220048, Минск,
проспект Машерова, 11.

Типография «Победа». 222310, Молодечно, ул. Тавлая, 11.